الدرس الأول : الاشتقاق

الاتصال والاشتقاق

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ مشتقة الاقتران $f(x)$ عند نقطة و اقعة على منحناه هي ميل المنحنى عند هذه النقطة ، و أنَّه يُرمَز إليها بالرمز $f'(x)$ ، ويُمكِن إيجادها باستعمال التعريف العام للمشتقة .

ولكنْ !! ، هل يُمكِن إيجاد مشتقة أيِّ اقتران عند أيِّ نقطة تقع على منحناه ؟ فمثلًا، هل يُمكِن إيجاد مشتقة الاقتران : $f(x) = x^{1/3}$ عندما $x = 0$ ؟

يكون الاقتران $f(x)$ قابلًا للاشتقاق عندما $x = a$ إذا كانت $f'(a)$ موجودة .

وفي هذه الحالة ، يكون لمنحنى الاقتران $f(x)$ مماس غيررأسي عندما $x = a$ ، ويكون أيضًا متصلًا

يكون الاقتران $f(x)$ قابلاً للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a, b) إذا كان قابلاً للاشتقاق عند جميع قِيَم x التي تحويها الفترة .

أمّا إذا كان f غيرقابل للاشتقاق عند واحدة أو أكثر من هذه القِيَم، فلا يُمكِن القول إنَّه قابل للاشتقاق على (a, b)

أفكر: لماذا لا توجد مشتقة للاقتران عند النقطة التي تقع على منحناه إذا كان مماس المنحنى رأسيًّا عند تلك النقطة ؟

تُبيِّن النظرية الآتية العلاقة بين الاتصال والاشتقاق :

نظرية — اتصال الاقتران القابل للاشتقاق عند نقطة ما

إذا كان الاقتران $f(x)$ قابلًا للاشتقاق عندما $x = a$، فإنَّه يكون متصلًا عندما $x = a$.

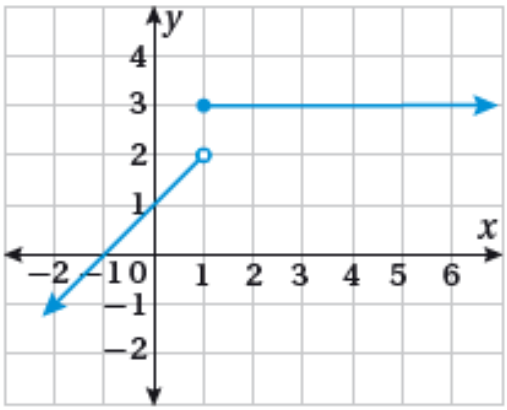
أستنتج من النظرية السابقة أنَّه :

إذا كان الاقتران $f(x)$ غيرمتصل عندما $x = a$ فإنَّه لا يكون قابلًا للاشتقاق عندما $x = a$ ، ومن ثَمَّ ، فإنَّ المشتقة لا تكون موجودة عند نقاط عدم الاتصال .

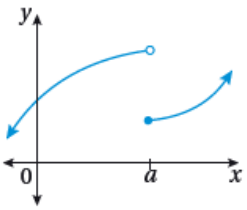
فمثلًا ، الاقتران :

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & , \quad x < 1 \\ 3 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

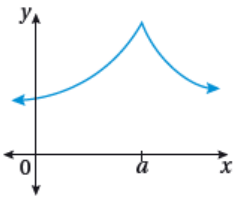
المُمثَّل بيانيًّا في الشكل المجاورغيرقابل للاشتقاق عندما $x = 1$ ؛ لأنَّه غيرمتصل عند هذه النقطة .



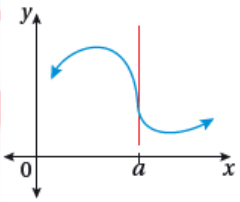
تُوضِّح التمثيلات البيانية الآتية الحالات الثلاث التي تُعَدُّ أكثر شيوعًا لعدم وجود المشتقة :



عدم اتصال عندما $x = a$.



رأس حاد، أو زاوية عندما $x = a$.



مماس رأسي عندما $x = a$.

أتعلم :

يحدث تغيُّر مفاجئ في اتجاه منحنى الاقتران ؛ ما يعني أنَّ مشتقة الاقتران من جهة اليسار لا تساوي مشتقته من جهة اليمين عند هذه النقطة .

يُمكِن تلخيص العلاقة بين الاتصال والاشتقاق على النحو الآتي :

مُلخَّص المفهوم — العلاقة بين الاتصال وقابلية الاشتقاق

- إذا كان الاقتران $f(x)$ قابلًا للاشتقاق عندما $x = a$، فإنَّه يكون متصلًا عندما $x = a$؛ لذا، فإنَّ قابلية الاشتقاق تضمن الاتصال.
- قد يكون الاقتران $f(x)$ متصلًا عندما $x = a$، وغير قابل للاشتقاق عندما $x = a$؛ لذا، فإنَّ الاتصال لا يضمن قابلية الاشتقاق.

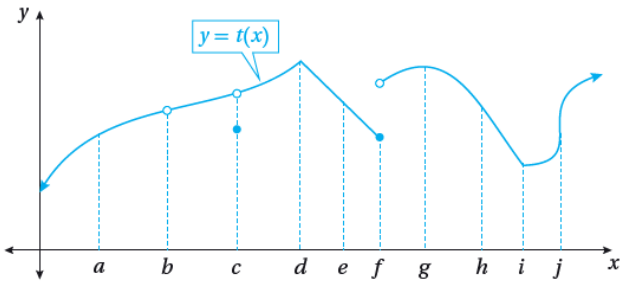
أتعلم :

الاتصال شرط ضروري ، لكنَّه غير كافٍ ، لوجود المشتقة .

مثال 1 صفحة 10

يُبيِّن الشكل الآتي منحنى الاقتران $t(x)$

أُحدِّد قِيَم x للنقاط التي يكون عندها الاقتران $t(x)$ غير قابل للاشتقاق، مُبرِّرًا إجابتي .



الحل :

❖ الاقتران $t(x)$ غير قابل للاشتقاق عندما

$x = b$ ، $x = c$ ، $x = f$

(لأنَّه غير متصل عند هذه النقاط)

❖ وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = i$ ، $x = d$

(نظرًا إلى وجود رأس حاد عند هاتين النقطتين)

❖ وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = j$

(نظرًا إلى وجود مماس رأسي عند هذه النقطة)

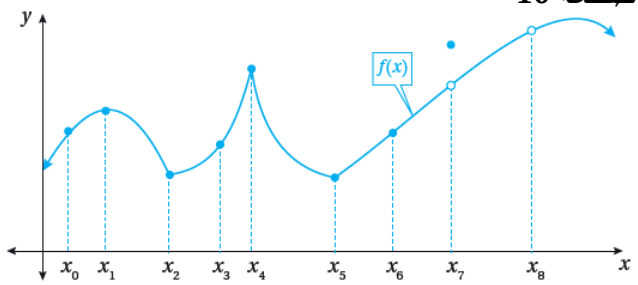
0797771137

أتعلم :

الاحظ أن الاقتران $t(x)$ متصل وقابل للاشتقاق عندما $x = h , x = e , x = g , x = a$ ، لأن منحناه متصل وأملس عند هذه النقاط .

يُبيّن الشكل الآتي منحنى الاقتران $f(x)$ أُحدِّد قِيَم x للنقاط التي يكون عندها الاقتران $f(x)$ غير قابل للاشتقاق، مُبرِّرًا إجابتي .

فهمي صفحة 10



الحل :

❖ الاقتران $f(x)$ غير قابل للاشتقاق عندما

$x = x_7$ ، $x = x_8$

(لأنَّه غير متصل عند هذه النقاط)

❖ وهو غير قابل للاشتقاق عندما

$x = x_5$ ، $x = x_4$ ، $x = x_2$

(نظرًا إلى وجود رأس حاد عند هذه النقاط)

مشتقة الاقتران الأُسِّي الطبيعي

تعلَّمْتُ سابقًا إيجاد مشتقة الاقتران الثابت ومشتقة اقتران القوَّة باستعمال قواعد خاصة من دون حاجة إلى استعمال التعريف العام للمشتقة .

سأتعلَّم في هذا الدرس إيجاد مشتقة الاقتران الأُسِّي الطبيعي، ومشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي ، ومشتقة اقتران الجيب ، ومشتقة اقتران جيب التمام؛ وهي إقترانات يقبل كلٌّ منها الاشتقاق على مجاله .

اتذكر :

يسمى العدد e الأساس الطبيعي ، أو العدد النيبيري ؛ وهو عدد غير نسبي ، ويُسمّى الاقتران $f(x) = e^x$ الاقتران الأُسِّي الطبيعي .

الاشتقاق على مجاله.

أفترض أنَّ (x, y) و $(x + \Delta x , y + \Delta y)$ نقطتان، كلٌّ منهما قريبة من الأُخرى ، وأنَّهما تقعان على منحنى الاقتران $f(x) = e^x$

إذن، الفرق بين الإحداثي y للنقطتين هو:

$$\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x$$

0797771137

ومنه، فإنَّ ميل القاطع المارّبالنقطتين :

(x, y) و $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ هو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

إذن، ميل المماس عند النقطة (x, y) هو:

$$m = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

$$= e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

ولكنْ، ما قيمة $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$:

يُمكِن الاستعانة بجدول القِيَم الآتي لإيجاد القيمة

				0		
Δx	-0.1	-0.01	-0.001		0.001	0.01	0.1
$\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$	0.9516	0.9950	0.9995		1.0005	1.0050	1.0517
				1		

أُلاحِظ من الجدول السابق أنَّ $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = 1$

إذن، ميل المماس عند النقطة (x, y) هو:

$$m = f'(x) = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x$$

وهذا يعني أنَّ ميل المماس عند أيِّ نقطة تقع على منحنى الاقتران الأُسِّي الطبيعي هو الإحداثي y لهذه النقطة .

نظرية — مشتقة الاقتران الأُسّي الطبيعي

إذا كان: $f(x) = e^x$، حيث e العدد النيبيري، فإنَّ:

$$f'(x) = e^x$$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

مثال 2

صفحة 12

اتذكر :

$a)\ \big(af(x)\big)' = af'(x)$

$b)\ (x^n)' = nx^{n-1}$

$c)\ (f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

$1)\ f(x) = 3e^x$

$f'(x) = 3e^x$

$2)\ f(x) = x^2 + e^x$

$f'(x) = 2x + e^x$

$3)\ y = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2xe^x}{x}$

$y = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x} - \dfrac{2xe^x}{x}$ بتوزع المقام على البسط

$y = \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x} - 2e^x$ بكتابة الاقتران في صورة اسية

$y = x^{-2/3} - 2e^x$ بالتبسيط

قواعد مشتقات اقتران القوّة، والاقتران الأُسّي الطبيعي ،

ومضاعفات الاقتران

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{3}x^{-5/3} - 2e^x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x^5}} - 2e^x$$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

اتحقق من فهمي صفحة 12

1) $f(x) = 5e^x + 3$

$$f'(x) = 5e^x$$

---

2) $y = \sqrt{x} - 4e^x$

$$y = x^{1/2} - 4e^x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-1/2} - 4e^x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 4e^x$$

---

3) $y = 8e^x + \frac{4}{\sqrt[5]{x}}$

$$y = 8e^x + \frac{4}{x^{\frac{1}{5}}} = 8e^x + 4x^{-\frac{1}{5}}$$

$$\frac{dy}{dx} = 8e^x + 4.\frac{-1}{5}x^{-\frac{1}{5}-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = 8e^x + \frac{-4}{5}x^{-\frac{6}{5}}$$

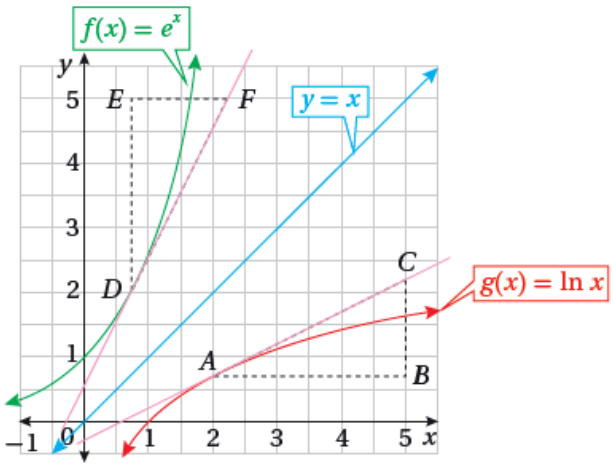
$$\frac{dy}{dx} = 8e^x - \frac{4}{5\sqrt[5]{x^6}}$$

مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

اتذكر :

الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي $y = \ln x$ هو الاقتران العكسي للاقتران الأُسّي الطبيعي $y = e^x$

يُبيّن الشكل الآتي منحنيي الاقترانين $f(x) = e^x$ و $g(x) = \ln x$



أُلاحِظ من التمثيل البياني أنَّ ميل المماس عند النقطة A ، الواقعة على منحنى الاقتران : $g(x) = \ln x$ هو $\frac{CB}{AB}$. اذن :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{CB}{AB}$$

بما أنَّ المثلث DEF هو انعكاس للمثلث ABC حول المستقيم $y = x$ فإنَّهما متطابقان ؛ لذا فإنَّ :

$$\frac{CB}{AB} = \frac{FE}{DE}$$

وبما أنَّ $\frac{DE}{FE}$ هو ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x) = e^x$ عند النقطة D ، فإنَّ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{CB}{AB} = \frac{FE}{DE} = \frac{1}{\frac{DE}{FE}}$$

وبما أنَّ ميل المماس عند أيِّ نقطة تقع على منحنى الاقتران الأُسِّي الطبيعي هو الإحداثي y لهذه النقطة ، فهذا يعني أنَّ :

ميل المماس عند النقطة D هو الإحداثي y للنقطة D. وبسبب الانعكاس ؛ فإنَّ :

الإحداثي y للنقطة D هو الإحداثي x للنقطة A

وبذلك، فإنَّ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{CB}{AB} = \frac{FE}{DE} = \frac{1}{\frac{DE}{FE}} = \frac{1}{x}$$

اتذكر :

الانعكاس تحويل هندسي ينقل الشكل من إحدى جهتي محور الانعكاس إلى الجهة الأُخرى على البُعْد نفسه من محور الانعكاس، من دون تغيير أبعاد الشكل أو تدويره

نظرية — مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

إذا كان: $f(x) = \ln x$، حيث: $x > 0$، فإنَّ:

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

يُمكِن إثبات هذه النظرية لاحقًا باستعمال الاشتقاق الضمني الوارد في الدرس الرابع من هذه الوحدة.

أتذكر : مجال الاقتران $\ln x$ هو $(0, \infty)$

تعلَّمْتُ سابقًا قوانين الضرب والقسمة والقوَّة للوغاريتمات ، ويُمكِنني استعمال هذه القوانين مع النظرية السابقة لإيجاد مشتقة اقتران يحتوي اللوغاريتم الطبيعي .

مراجعة المفهوم — قوانين اللوغاريتمات

إذا كانت b, x, y أعدادًا حقيقيةً موجبةً، وكان p عددًا حقيقيًّا، حيث: $b \neq 1$، فإنَّ:

- قانون الضرب: $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$
- قانون القسمة: $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$
- قانون القوَّة: $\log_b x^p = p \log_b x$

افكر : لماذا يشترط أن $b \neq 1$ ؟

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

مثال 3

صفحة 14

1) $f(x) = \ln x^4$

$f(x) = 4 \ln x$

$f'(x) = 4\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{4}{x}$

$$2)\ f(x) = \ln x\, e^x + \ln 7x$$

$$f(x) = \ln x + \ln e^x + \ln 7 + \ln x$$

$$f(x) = \ln x + x \ln e + \ln 7 + \ln x$$

$$= 2\ln x + x + \ln 7$$

$$f'(x) = 2\left(\frac{1}{x}\right) + 1 + 0$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} + 1$$

أجد مشتقة كل اقران مما يأتي :

اتحقق من فهمي صفحة 14

$$1)\ f(x) = \ln(4x) + \sqrt{x}$$

$$f(x) = \ln 4 + \ln x + x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 0 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$2)\ f(x) = \ln(2x^3)$$

$$f(x) = \ln 2 + \ln x^3$$

$$f(x) = \ln 2 + 3\ln x$$

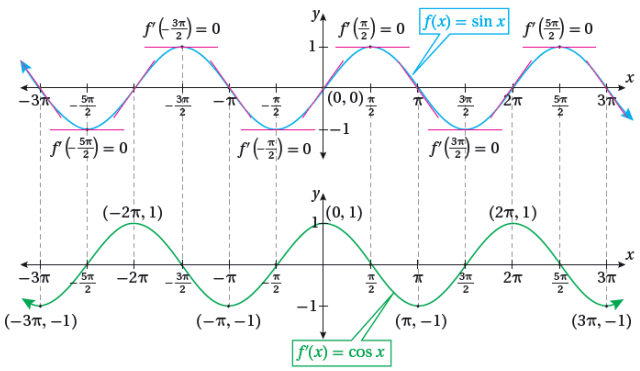
$$f'(x) = 0 + 3\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = 0 + \frac{3}{x} = \frac{3}{x}$$

مشتقة اقتران الجيب، ومشتقة اقتران جيب التمام

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ الاقترانات المثلثية هي قواعد معطاة باستعمال النسب المثلثية . وسأتعلَّم الآن إيجاد مشتقة كلٍّ من اقتران الجيب، و اقتران جيب التمام .

يُبيِّن الشكل الآتي كُلًّ من التمثيل البياني لمنحنى الاقتران $f(x) = \sin x$ ، حيث x قياس الزاوية بالراديان ، والتمثيل البياني لمنحنى $f'(x)$ الذي تم رسمه باستعمال ميل المماس لمنحنى $f(x)$



يظهر من الشكل السابق أنَّ منحنى $f'(x)$ مُطابِق تمامًا لمنحنى جيب التمام ؛ ما يعني أنَّ $f'(x) = cosx$ ويُمكِن بطريقة مشابهة استنتاج أنَّ مشتقة اقتران جيب التمام هي انعكاس منحنى اقتران الجيب حول المحور x

أتذكر : لا يُعَدُّ الرسم إثباتًا رياضيًّا للنظرية ، ولكنَّه يعطي تصوُّرًا حولها .

نظرية مشتقة اقتران الجيب، ومشتقة اقتران جيب التمام

- إذا كان: $f(x) = \sin x$، فإنَّ: $f'(x) = \cos x$.
- إذا كان: $f(x) = \cos x$، فإنَّ: $f'(x) = -\sin x$.

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

مثال 4

صفحة 16

1) $f(x) = 3\sin x + 4$

$f'(x) = 3\cos x + 0$

$f'(x) = 3\cos x$

---

2) $y = \frac{1}{2}e^x - 7\cos x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}e^x - 7(-\sin x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}e^x + 7\sin x$

---

3) $y = \frac{\sin x}{2} + 3\cos x$

$y = \frac{1}{2}\sin x + 3\cos x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(\cos x) + 3(-\sin x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(\cos x) - 3\sin x$

---

4) $f(x) = x^2 + \cos x + \sin\frac{\pi}{2}$

$f'(x) = 2x + (-\sin x) + 0$

$f'(x) = 2x - \sin x$

تطبيقات: معادلة المماس والعمودي عند نقطة ما

يُمكِن استعمال أيٍّ من قواعد الاشتقاق التي تعلَّمْتُها في هذا الدرس لإيجاد معادلة المماس عند نقطة ما على منحنى الاقتران ,

اذا كان $f(x) = ln\left(\frac{x}{e}\right)$ فأستعمل المشتقة لإيجاد كل مما يأتي :

مثال 5

صفحة 16

1) معادلة المماس عند النقطة $(1, -1)$

الحل :

أتذكر : اذا كان $b \neq 1$ ، حيث $b > 0$: ، فإن :

$$log_b b = 1$$

الخطوة 1 : أجد ميل المماس عند النقطة $(1, -1)$

$$f(x) = ln\left(\frac{x}{e}\right) = ln\,x - ln\,e$$
$$= ln\,x - 1$$
$$f'(x) = \frac{1}{x}$$
$$f'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

اذن ميل المماس هو 1 .

الخطوة 2 : أجد معادلة المماس .

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - (-1) = 1(x - 1)$$
$$y = x - 2$$ معادلة المماس

2) معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(1, -1)$

الحل :

بما أنَّ ميل المماس عند النقطة $(1, -1)$ هو 1 ، فإنَّ ميل العمودي على المماس هو -1 ومنه، فإنَّ معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(1, -1)$ هي :

$$y - (-1) = -1(x - 1)$$

$$y = -x$$

اذا كان $f(x) = ln\sqrt{x}$ فأستعمل المشتقة لإيجاد كل مما يأتي :

اتحقق من فهمي

صفحة 17

1) معادلة المماس عند النقطة $(e, \frac{1}{2})$

الحل :

الخطوة 1 : أجد ميل المماس عند النقطة $(e, \frac{1}{2})$

$$f(x) = ln\sqrt{x} = ln\, x^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2} ln\, x$$

$$f'(x) = \frac{1}{2x}$$

$$f'(e) = \frac{1}{2e}$$

اذن ميل المماس هو $\frac{1}{2e}$.

الخطوة 2 : أجد معادلة المماس .

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2e}(x - e)$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{x}{2e} - \frac{e}{2e}$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{x}{2e} - \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{x}{2e}$$

2) معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(e, \frac{1}{2})$

الحل :

بما أنَّ ميل المماس عند النقطة $(e, \frac{1}{2})$ هو $\frac{1}{2e}$ ، فإنَّ ميل العمودي على المماس هو $-2e$ ومنه، فإنَّ معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(e, \frac{1}{2})$ هي :

$$y - \frac{1}{2} = -2e(x - e)$$

$$y - \frac{1}{2} = -2ex + 2e^2$$

$$+\frac{1}{2} \qquad +\frac{1}{2}$$

$$y = 2e^2 - 2ex + \frac{1}{2}$$

T. Haitham Harb
JoSchool-Online
0797771137

تطبيقات: الحركة في مسار مستقيم

عند دراسة جسم يتحرّك في مسار مستقيم، أفترض أنَّ الجسم يتحرّك على خط أعداد انطلاقًا من موقع ابتدائي ، وأنَّ اتجاه حركته يكون موجبًا أو سالبًا ، وأنَّ موقع هذا الجسم بالنسبة إلى نقطة الأصل يُمثِّل اقترانًا بالنسبة إلى الزمن t ، ويُرمَز إليه بالرمز $s(t)$

أتذكر : يأخذ موقع الجسم $s(t)$ قِيَمًا موجبةً، أو سالبةً، أو صفرًا .

يُطلَق على مُعدَّل تغيُّر اقتران الموقع $s(t)$ بالنسبة إلى الزمن اسم السرعة المتجهة للجسم، ويُرمَز إليه بالرمز $v(t)$. وقد سُمِّي بهذا الاسم لأنَّه يُستعمَل لتحديد كلٍّ من مقدار سرعة الجسم ، و اتجاه حركته

أتعلم : تسمى النقطة 0 على خط الأعداد نقطة الأصل .

إذا كانت قيمة $v(t) > 0$ ، فإنَّ الجسم يتحرّك في الاتجاه الموجب (إلى اليمين) .

إذا كانت قيمة $v(t) < 0$ ، فإنَّ الجسم يتحرّك في الاتجاه السالب (إلى اليسار) .

إذا كانت $v(t) = 0$ فإنَّ الجسم يكون في حالة سكون

يُطلَق على مُعدَّل تغيُّر السرعة المتجهة بالنسبة إلى الزمن اسم التسارع ويُرمَز إليه بالرمز $a(t)$ أمّا القيمة المُطلَقة للسرعة المتجهة فتُسمّى السرعة وهي تُحدِّد مقداراً، ولا تُحدِّد اتجاه الحركة .

أتعلم : المسافة كمية قياسية (ليست متجهة) ، والموقع كمية متجهة .

مفهوم أساسي — الحركة في مسار مستقيم

إذا مثَّل الاقتران $s(t)$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، فإنَّ سرعته المتجهة $v(t)$ تعطى بالعلاقة: $v(t) = s'(t)$، وتسارعه $a(t)$ يعطى بالعلاقة: $a(t) = v'(t) = s''(t)$.
أمّا سرعته فهي $|v(t)|$.

أتعلم : من أمثلة الحركة في مسار مستقيم : حركة سيّارة على طول جزء مستقيم من الطريق، وسقوط كرة رأسيًّا من سطح مبنى ، وتذبذب جسم مُعلَّق بزنبرك في مسار مستقيم ، وحركة جسم مقذوف رأسيًّا إلى أعلى في مجال الجاذبية الأرضية .

مثال6
صفحة 18

يمثل الاقتران $s(t) = 6t^2 - t^3 \ , \ t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم حيث s الموقع بالامتار ، t الزمن بالثواني .

1) جد السرعة المتجهة والتسارع عندما $t = 2$

الحل :

سرعة الجسم المتجهة :

أجد مشتقة اقتران الموقع ، ثم اعوض $t = 2$ في المشتقة .

$$v(t) = s'(t) = 12t - 3t^2$$
$$v(2) = 12(2) - 3(2)^2$$
$$= 24 - 12$$
$$= 12$$

تسارع الجسم :

أجد مشتقة اقتران السرعة المتجهة ، ثم اعوض $t = 2$ في المشتقة .

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 12 - 6t$$
$$a(2) = 12 - 6(2)$$
$$= 0 \ m/s^2$$

سرعة الجسم المتجهة عندما $t = 2$ هي $12 \ m/s$
وتسارعه $0 \ m/s^2$

2) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي .

الحل :

يكون الجسم في حالة سكون لحظي إذا كانت سرعته 0 ؛
أيْ عندما $v(t) = 0$

$$v(t) = 12t - 3t^2$$
$$v(t) = 0$$
$$12t - 3t^2 = 0$$
$$3t(4 - t) = 0$$
$$3t = 0 \quad or \quad (4 - t) = 0$$
$$t = 0 \quad or \quad t = 4$$

الجسم في حالة سكون لحظي عندما $t = 0 \ , \ 4$

---

3) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 5$

الحل :

$$v(t) = 12t - 3t^2$$
$$v(5) = 12(5) - 3(5)^2$$
$$= 60 - 75$$
$$= -15 \ m/s$$
$$\therefore v(5) = -15 \ m/s \ < \ 0$$

بما ان إشارة السرعة المتجهة سالبة ، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه السالب عندما $t = 5$

T.Haitham Harb
JoSchool-Online
0797771137

4) متى يعود الجسم الى موقعه الابتدائي ؟

الحل :

يكون الجسم في موقعه الابتدائي أوَّل مَرَّة عندما $t = 0$

ومنه، فإنَّ : $s(0) = 0$

لإيجاد الأوقات التي يعود فيها الجسم إلى هذه النقطة،

أحُلُّ المعادلة $s(t) = 0$

$$6t^2 - t^3 = 0$$

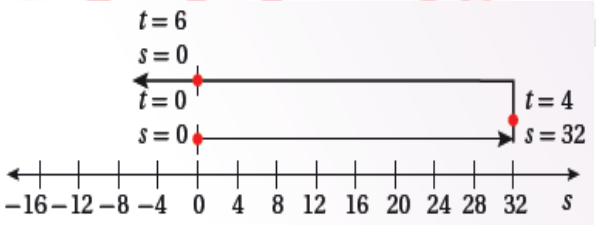
$$t^2(6 - t) = 0$$

$$t^2 = 0 \quad or \quad 6 - t = 0$$

$$t = 0 \quad or \quad t = 6$$

اذن يعود الجسم الى موقعه مرة أخرى عندما $t = 6$

الدعم البياني :يُبيِّن المُخطَّط الآتي اتجاهات حركة الجسم في المسار المستقيم



يمثل الاقتران $s(t) = t^2 - 7t + 8 \ , \ t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم حيث s الموقع بالامتار ، t الزمن بالثواني .

اتحقق من فهمي

صفحة 20

1) أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = 4$

الحل :

سرعة الجسم المتجهة :

أجد مشتقة اقتران الموقع ، ثم اعوض $t = 4$ في المشتقة .

$$v(t) = s'(t) = 2t - 7$$

$$v(4) = 2(4) - 7$$

$$= 8 - 7$$

$$= 1$$

تسارع الجسم :

أجد مشتقة اقتران السرعة المتجهة ، ثم اعوض $t = 4$ في المشتقة .

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

$$= 2 \ m/s^2$$

سرعة الجسم المتجهة عندما $t = 4$ هي $1 \ m/s$

وتسارعه $2 \ m/s^2$

T. Haitham Harb JoSchool 079777...

2) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي .

الحل :

يكون الجسم في حالة سكون لحظي إذا كانت سرعته 0 ؛

أيْ عندما $v(t) = 0$

$$v(t) = 2t - 7$$
$$v(t) = 0$$
$$2t - 7 = 0$$
$$2t = 7$$
$$t = \frac{7}{2}$$

الجسم في حالة سكون لحظي عندما $t = \frac{7}{2}$

---

3) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 2$

الحل :

$$v(t) = 2t - 7$$
$$v(2) = 2(2) - 7$$
$$= 4 - 7$$
$$= -3\ m/s$$
$$\therefore v(2) = -3\ m/s \ < \ 0$$

بما ان إشارة السرعة المتجهة سالبة ، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه السالب عندما $t = 2$

4) متى يعود الجسم الى موقعه الابتدائي ؟

الحل :

الموقع الابتدائي (بداية الحركة) $\leftarrow S(0)$

$$S(t) = t^2 - 7t + 8$$
$$S(0) = (0)^2 - 7(0) + 8$$
$$= 8$$

اذا نبدأ حركة الجسم عند $S = 8$ متى يعود الجسم لهذا الموقع مرة أخرى ؟

$$S(t) = 8 \quad , \quad t \ ?$$
$$t^2 - 7t + 8 = 8$$
$$t^2 - 7t = 0$$
$$t(t - 7) = 0$$
$$t = 0 \quad or \quad t = 7$$

اذا يعود الجسم الى موقعه مرة أخرى عندما $t = 7$

تطبيقات : الحركة التوافقية البسيطة

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ الاقترانات الجيبية تُستعمَل لنمذجة السلوك الدوري في كثير من المواقف الحياتية والعلمية، مثل :

☒ حركة اهتزاز كتلة مُعلَّقة بزنبرك : إذ يُمكِن إيجاد سرعة هذه الكتلة وتسارعها باستعمال المشتقات

T. Haitham Harb
JoSchool-Online
0797771137

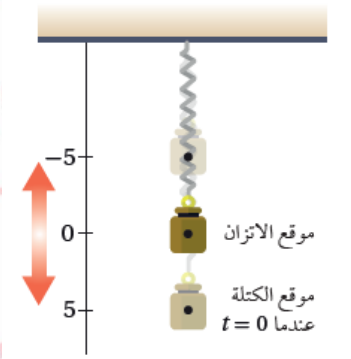
أتذكر : إذا كانت المعادلة التي تَصِف الإزاحة y لجسم عند الزمن t هـ ي :

$$y = a \sin \omega t \quad \text{أو} \quad y = a \cos \omega t$$

فإنَّ الجسم يكون في حركة تو افقية بسيطة .

مثال 7 صفحة 20

يبين الشكل المجاور جسماً معلقاً بزنبرك شد 5 وحدات اسفل الاتزان $(s = 0)$ ، ثم ترك عند الزمن $t = 0$ ليتحرك الى الأعلى والى الأسفل ويمثل $s(t) = 5 \cos t$ موقع الجسم عند أي زمن ، حيث t الزمن بالثواني ، و s الموقع بالامتار



1) جد اقترانا يمثل سرعة الجسيم واقترانا اخر يمثل تسارعه عند أي نقطة .

الحل :

اقتران السرعة :

$$v(t) = S'(t) = -5 \sin t$$

اقتران التسارع :

$$a(t) = v'(t) - 5 \cos t$$

2) صف حركة الجسم .

الحل :

اعتمادًا على الخصائص الجبرية لاقتران الموقع، فإنَّ الجسم يتحرَّك بمرور الزمن بين الموقع $s = 5$ والموقع $s = -5$ على المحور s ، والقيمة السالبة تعني أنَّ الجسم فوق موقع الاتزان .

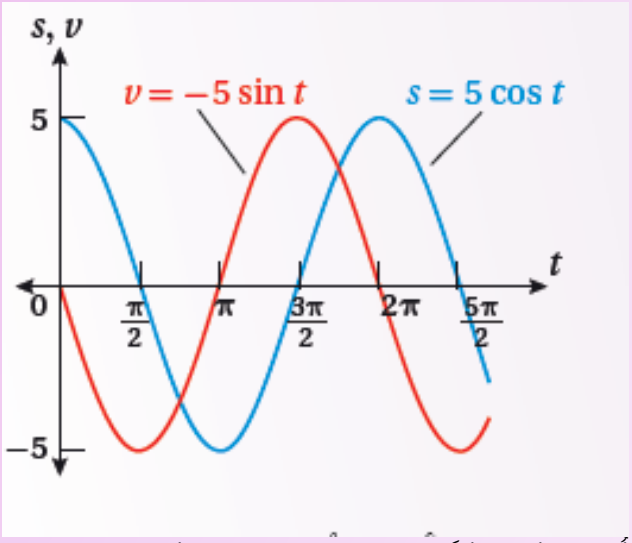
أُلاحِظ أنَّ قيمة السرعة تكون أكبر ما يُمكِن في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب عندما $|\sin t| = 1$ وفي هذه الحالة، فإنَّ $\cos t = 0$ (متطابقة فيثاغورس) وبالرجوع إلى اقتران الموقع، أُلاحِظ أنَّ قيمته تُصبح صفرًا (موقع الاتزان) عندما $\cos t = 0$ ما يعني

أنَّ سرعة الجسم تكون أكبر ما يُمكِن عندما يمرُّ الجسم بموقع الاتزان .

اعتمادًا على الخصائص الجبرية لاقتران التسارع، فإنَّ قيمة تسارع الجسم تكون دائمًا معكوس قيمة موقع الجسم؛ ذلك أنَّ مُحصِّلة القوى تسحب الجسم إلى الأسفل إذا كان أعلى موقع الاتزان، وأنَّ مُحصِّلة القوى تسحب الجسم إلى الأعلى إذا كان أسفل موقع الاتزان

تكون قيمة التسارع صفرًا فقط عند موقع الاتزان؛ لأنَّ قوَّة الجاذبية وقوَّة الزنبرك تُلغي إحداهما الأُخرى عند هذه النقطة. ولكنْ، إذا كان الجسم عند أيِّ موقع آخر، فإنَّ هاتين القوَّتين لا تكونان متساويتين ، والتسارع لا يساوي صفرًا

أتذكر : أُلاحِظ من التمثيل البياني الآتي لاقتراني الموقع والسرعة المتجهة أنَّ موقع الجسم يتراوح بين القيمتين $s = 5\ cm\ , s = -5\ cm$ وأنَّ سرعته المتجهة تتراوح بين القيمتين $v = 5\ cm/s$ و $v = -5\ cm/s$



أُلاحِظ أيضًا أنَّ اقتران السرعة يكون أكبر ما يُمكِن عندما يقطع منحنى اقتران الموقع المحور x (موقع الاتزان)

يتحرك جسم معلق بزنبرك الى اعلى والى اسفل ويمثل الاقتران $s(t) = 7\ sin\ t$ اتحقق من موقع الجسم عند أي زمن لاحق ، حيث t فهي الزمن بالثواني ، و s الموقع بالامتار صفحة 22

a) جد اقترانا يمثل سرعة الجسم واقترانا اخر يمثل تسارعه عند أي نقطة .

الحل :

$$S(t) = 7 \sin t$$

$$v(t) = S'(t) = 7 \cos t$$

$$v(t) = 7 \cos t$$

$$a(t) = v'(t)$$

$$a(t) = 7\ (-\sin t\ )$$

$$a(t) = -7 \sin t$$

b) صف حركة الجسم .

الحل :

الموقع $S(t) = 7 \sin t$

الجسم يتحرك مع مرور الزمن بين $s = 7$ و $s = -7$

السرعة $v(t) = 7 \cos t$

لان $v(t)$ يعتمد على $\cos t$ اذا تكون اعلى قيمة لـ $|\cos t| = 1$ في $v(t)$ الاتجاه السالب او الموجب عندما

اما الموقع فيعتمد على $\sin t$ وحسب نظرية فيثاغورس :

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\sin^2 t + 1 = 1$$

$$\sin t = 0$$

ومنه فإن اقتران الموقع :

$$S(t) = 7 \sin t = 7\,(0) = 0$$

$$S(t) = 0$$

اذن عندما تكون السرعة اكبر ما يمكن يكون الجسم عند موقع الاتزان $S = 0$ "

ثالثا : قيمة التسارع للجسم تكون معكوس قيمة الموقع

حيث : $a(t) = -7 \sin t$

$$S(t) = 7 \sin t$$

وذلك لان محصلة القوى :

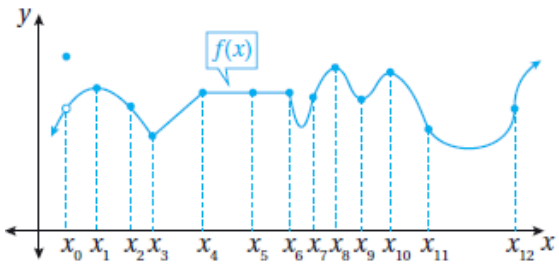
- تسحب الجسم الى الأعلى اذا كان موقع الجسم اسفل موقع الاتزان .
- تسحب الجسم الى الاسفل اذا كان موقع الجسم اعلى موقع الاتزان .

رابعا : قيمة التسارع تكون صفر عند نقطة الاتزان .

لان قوة الزنبرك والجاذبية تلغي احداهما الأخرى " عند أي نقطة أخرى القوتين غير متساويتين ← $a \neq 0$

اتدرب وأحل المسائل

أُحدِّد قِيَم x للنقاط التي لا يكون عندها كل اقتران ممّا يأتي قابلً للاشتقاق، مُبرِّرًا إجابتي :

1. 

الحل :

❖ الاقتران $f(x)$ غير قابل للاشتقاق عندما

$$x = x_0$$

(لأنَّه غير متصل عند هذه النقاط)

❖ وهو غير قابل للاشتقاق عندما

$$x = x_6 \ , \ x = x_3 \ , \ x_4$$

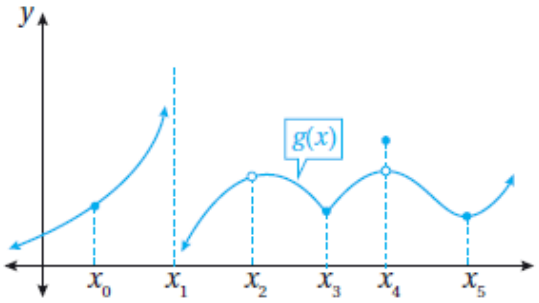
(نظرًا إلى وجود رأس حاد عند هاتين النقطتين)

❖ وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_{12}$

(نظرًا إلى وجود مماس رأسي عند هذه النقطة)

T.Haitham Harb JoSchool-Online 0797771137

2.



الحل :

❖ الاقتران $f(x)$ غير قابل للاشتقاق عندما

$x = x_4 \ , \ x = x_2 \ , \ x = x_1$

(لأنَّه غير متصل عند هذه النقاط)

❖ وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_3$

(نظرًا إلى وجود مماس رأسي عند هذه النقطة)

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي :

3. $f(x) = 2\ sin\ x - e^x$

$f'(x) = 2\ cos\ x - e^x$

4. $f(x) = \dfrac{ln\ x}{4} - \pi\ cos\ x$

$f'(x) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x}\right) + \pi\ sin\ x$

$f'(x) = \dfrac{1}{4x} + \pi\ sin\ x$

5. $f(x) = ln\left(\dfrac{1}{x^3}\right) + x^4$

$f(x) = ln\ 1 - ln\ x^3 + x^4$

$= 0 - 3ln\ x + x^4$

$= -3ln\ x + x^4$

$f'(x) = -3\left(\dfrac{1}{x}\right) + 4x^3$

$f'(x) = \dfrac{-3}{x} + 4x^3$

---

6. $f(x) = e^{x+1} + 1$

$f(x) = e^x . e + 1$

$f'(x) = ee^x + 0$

$f'(x) = e^{x+1}$

---

7. $f(x) = e^x + x^e$

$f'(x) = e^x + ex^{e-1}$

---

8. $f(x) = ln\left(\dfrac{10}{x^n}\right)$

$f(x) = ln\ 10 - ln\ x^n$

$= ln\ 10 - n\ ln\ x$

$f'(x) = 0 - n\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$f'(x) = \dfrac{-n}{x}$

T. Haitham Harb
JoSchool-Online
0797771137

اذا كان $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}e^x$ ، اجب عن الفرعين الاتيين :

9 . أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $\left(\pi, \frac{1}{2}e^{\pi}\right)$

الحل :

$$f'(x) = cosx + \frac{1}{2}e^x$$

$$f'(\pi) = cos\,\pi + \frac{1}{2}e^{\pi}$$

$$f'(\pi) = -1 + \frac{1}{2}e^{\pi}$$ ميل المماس

الان لنكتب معادلة المماس :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{1}{2}e^{\pi} = \left(-1 + \frac{1}{2}e^{\pi}\right)(x - \pi)$$

$$y - \frac{1}{2}e^{\pi} = \left(-1 + \frac{1}{2}e^{\pi}\right)x + \pi - \frac{\pi}{2}e^{\pi}$$

$$y = \left(-1 + \frac{1}{2}e^{\pi}\right)x + \pi - \frac{\pi}{2}e^{\pi} + \frac{1}{2}e^{\pi}$$

10 . أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $\left(\pi, \frac{1}{2}e^{\pi}\right)$

الحل : ميل المماس $= -1 + \frac{1}{2}e^{\pi}$

ومنه ميل العمودي $= \frac{-1}{\text{ميل المماس}} = \frac{-1}{-1+\frac{1}{2}e^{\pi}}$

ميل العمودي $= \frac{-2}{-2+e^{\pi}} = \frac{2}{2-e^{\pi}}$

معادلة العمودي على المماس

$$y - \frac{1}{2}e^{\pi} = \left(\frac{2}{2 - e^{\pi}}\right)(x - \pi)$$

$$y - \frac{1}{2}e^{\pi} = \left(\frac{2}{2 - e^{\pi}}\right)x - \frac{2\pi}{2 - e^{\pi}}$$

$$y = \left(\frac{2}{2 - e^{\pi}}\right)x - \frac{2\pi}{2 - e^{\pi}} + \frac{1}{2}e^{\pi}$$

---

11 . أجد قيمة x التي يكون عندها المماس افقياً لمنحنى الاقتران $f(x) = e^x - 2x$

الحل : المماس افقي يعني $f'(x) = 0$

$$f'(x) = e^x - 2 = 0$$

$$e^x = 2 \quad \rightarrow \quad ln\,e^x = ln\,2$$

$$\rightarrow \quad x = ln\,2$$

T. Haitham Hrb
JoSchool-Online
0797771137

12 . اختيار من مُتعدِّد : أيُّ الآتية تُمثِّل معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x) = \sin x + \cos x$ عندما $x = \pi$ ؟

$a)\ y = -x + \pi - 1$

$b)\ y = x - \pi - 1$

$c)\ y = x - \pi + 1$

$d)\ y = x + \pi + 1$

الحل :

$$f'(x) = \cos x - \sin x$$

$$m = f'(\pi) = \cos \pi - \sin \pi$$

$$= -1 - 0$$

$$m = -1$$

$$f(\pi) = \sin \pi + \cos \pi$$

$$= 0 + -1$$

$$(\pi, -1)$$

ميل المماس هو -1 .اذن ميل العمودي هو $\frac{-1}{-1} = 1$

$$y + 1 = 1(x - \pi)$$

$$y = x - \pi - 1$$

13 . إذا كان $f(x) = \ln(kx)$ حيث k عدد حقيقي موجب ، و $x > 0$ ، فأُبيّن أنَّ $f'(x) = \frac{1}{x}$

الحل :

$$f(x) = \ln(kx)$$

$$f(x) = \ln(k) - \ln(x)$$

$$f'(x) = 0 - \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{x}$$

إذا كان الاقتران $f(x) = \ln(x)$ فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا :

14 . أُثبِت أنَّ مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(e, 1)$ يمرُّ بنقطة الأصل .

الحل :

$$f(x) = \ln x \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(e) = \frac{1}{e}$$

T. Haitham Harb
JoSchool-Online
0797771137

معادلة المماس :

$$y-1=\frac{1}{e}(x-e)$$

عندما $x=0$

$$y-1=\frac{1}{e}(0-e)$$

$$y-1=(0-1)$$

$$y=0$$

اذن المماس يمر بالنقطة $(0,0)$

15 . أُثبِت أنَّ المقطع x للعمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة $(e,1)$ هو $e+\frac{1}{e}$

الحل : ميل المماس $=\frac{1}{e}$

ميل العمودي $=\frac{-1}{\text{ميل المماس}}=-e$

معادلة العمودي :

$$y-1=-e(x-e)$$

المقطع x يعني ان $y=0$

$$0-1=-e(x-e)$$

$$-1=-e(x-e)$$

$$1=e(x-e)$$

$$\frac{1}{e}=(x-e)$$

$$x=e+\frac{1}{e}$$

يمثل الاقتران $s(t)=t^3-4t^2+5t \ , \ t\geq 0$

موقع جسم يتحرك على خط مستقيم حيث :

s الموقع بالامتار، t الزمن بالثواني

16 . أجد سرعة الجسم والتسارع عندما $t=5$

الحل :

$$v(t)=s'(t)=3t^2-8t+5$$

$$v(5)=3(5)^2-8(5)+5$$

$$=75-40+5$$

$$=40$$

$$a(t)=v'(t)=6t-8$$

$$a(5)=6(5)-8$$

$$=30-8$$

$$=22$$

17 . أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي .

الحل :

$$3t^2-8t+5=0$$

$$(3t-5)(t-1)=0$$

$$3t-5=0 \quad , \quad t-1=0$$

$$t=\frac{5}{3} \quad , \quad t=1$$

T. Haitham Harb
JoSchool-Online
0797771137

18 . في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 4$

الحل :

$$v(4) = 3(4)^2 - 8(4) + 5$$
$$= 48 - 32 + 5$$
$$= 21 > 0$$

الاتجاه هو نفس الاتجاه الأصلي لليمين .

19 . متى يعود الجسم الى موقعه الابتدائي ؟

الحل :

$$t^3 - 4t^2 + 5t = 0$$
$$t(t^2 - 4t + 5) = 0$$
$$t = 0 \quad , \quad t^2 - 4t + 5 = 0$$

نجد المميز

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= 4^2 - 4(1)(5)$$
$$= 16 - 20 = -4 < 0$$

المميز سالب يعني انه لا يوجد اصفار

$$\therefore t = 0$$

أي لا يعود الجسم الى موقعه الابتدائي ابداً .

يمثل الاقتران $s(t) = e^t - 4t \ , \ t \geq 0$

موقع جسيم يتحرك على خط مستقيم حيث :

s الموقع بالامتار، t الزمن بالثواني

20 . أحدد الموقع الابتدائي للجسيم .

الحل :

$$s(0) = e^0 - 4(0)$$
$$= 1 - 0$$
$$= 1\ m$$

21 . أجد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته المتجهة صفراً .

الحل :

$$v(t) = 0$$
$$v(t) = s'(t) = e^t - 4 = 0$$
$$e^t = 4 \quad \rightarrow \quad t = ln\ 4$$

نجد تسارع الجسيم عندما $t = ln\ 4$

$$a(t) = v'(t) = e^t$$
$$a(ln\ 4) = e^{ln\ 4}$$
$$= 4\ m/s^2$$

Haitham Harb
JoSchool Online
0797771137

زنبرك : يتحرّك جسم مُعلّق بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل ، ويُحدِّد الاقتران $s(t) = 4\cos t$ موقع الجسم عند أيّ زمن لاحق ، حيث t الزمن بالثواني ، و s الموقع بالأمتار:

22 . أجد اقترانًا يُمثِّل سرعة الجسم ، و اقترانًا آخرَيُمثِّل تسارعه عند أيّ لحظة .

الحل :

$$s(t) = 4\cos t$$
$$v(t) = -4\sin t$$
$$a(t) = -4\cos t$$

23 . أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t = \frac{\pi}{4}$

الحل :

$$v\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\sin\frac{\pi}{4} = -4\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{-4}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{-4\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}\ m/s$$
$$a\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\cos\frac{\pi}{4} = -4\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= -2\sqrt{2}\ m/s$$

24 . أَصِف حركة الجسم .

الحل :

من خصائص اقتران $s(t) = 4\cos t$ نعرف ان الجسم يتحرك بمرور الزمن صعوداً أو هبوطاً بين الموقعين $s = -4\ m$ و $s = 4\ m$ و أنه يمر بنقطة الاتزان $s = 0$ اثناء هذه الحركة عندما $t = \frac{n\pi}{2}$ حيث n أي عدد فردي موجب . تتغير سرعة الجسم بمرور الزمن وتعرف من خصائص $v(t) = -4\sin t$ ان قيم السرعة تتراوح بين $-4\ m/s$ و $4\ m/s$ نلاحظ ان الجسم يصل الى هذه السرعة عند اللحظات التي يمر فيها بنقطة الاتزان .

نلاحظ ان قيمة تسارع الجسم عند كل لحظة تساوي معكوس قيمة اقتران الموقع عند تلك اللحظة وأن التسارع ينعدم عند مرور الجسم بنقطة الاتزان حيث تكون محصلة القوى المؤثرة في الجسم صفراً .

T. Haitham Harb
Joschool Online
0797771137

مهارات التفكير العليا

25 . تبرير: إذا كان الاقتران $y = e^x - ax$ ، حيث a عدد حقيقي ، فأجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y ، مُبرِّرًا إجابتي .

الحل : يقطع المنحنى محور y عندما $x = 0$

$y = e^0 - a(0)$

$= 1 - 0 = 1$ النقطة $(0, 1)$

$y' = e^x - a$

$y'(0) = e^0 - a = 1 - a$ ميل المماس

الان نكتب معادلة المماس :

$y - 1 = (1 - a)(x - 0)$

$y - 1 = (1 - a)(x)$

$y = (1 - a)(x) + 1$

26 . تحدٍّ : أُثبِت عدم وجود مماس ميله 2 للاقتران

$y = 2e^x + 3x + 5x^3$

الحل : ميل مماس المنحنى عند أي نقطة عليه هو

$y' = 2e^x + 3 + 15x^2$

$2e^x > 0$ لكل قيم x

$15x^2 > 0$ لكل قيم x

$2e^x + 15x^2 > 0$

$+3 \quad +3$

$2e^x + 15x^2 + 3 > 3$

أي ان $y' > 3$ ← لا يمكن ان تكون قيمة y' تساوي 2 لأي قيمة حقيقية للمتغير x .

تبرير: إذا كان الاقتران $y = ke^x$ حيث $k > 0$ وكان منحناه يقطع المحور y عند النقطة P ، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا :

27 . أجد نقطة تقاطع مماس منحنى الاقتران عند النقطة P مع المحور x

الحل : يقطع المحور y عندما $x = 0$ وبالتعريف في معادلة الاقتران نجد أن $y = ke^0 = k$. أي ان احداثي P هي $(0, k)$

$y = ke^x \quad \rightarrow \quad y' = ke^x$

$y'(0) = ke^0 = 0$

Mr. Haitham Harb
Joschool-Online
0797771137

معادلة المماس : $y - k = k(x - 0)$

$y - k = kx \quad \rightarrow \quad y = kx + k$

ولإيجاد نقطة التقاطع مع المحور y نعوض $y = 0$

$0 = kx + k \quad \rightarrow \quad \frac{kx}{k} = \frac{-k}{k} \rightarrow x = -1$

نقطة تقاطع المماس عند P مع المحور x هي $(-1, 0)$

28 . إذا كان العمودي على المماس عند النقطة P يقطع المحور x عند النقطة $(100, 1)$ ، فأجد قيمة k

الحل : ميل المماس $= k$ $\leftarrow$ ميل العمودي $= \frac{-1}{k}$

معادلة العمودي هي :

$y - k = \frac{-1}{k}(x - 0) \quad \rightarrow \quad y = \frac{-1}{k}x + k$

وبتعويض نقطة التقاطع :

$0 = \frac{-1}{k}(100) + k$

$k^2 = 100 \quad \rightarrow \quad k = \pm 10$

ولأن $k > 0$ فإن $k = 10$.

تحدٍّ : إذا كان الاقتران $y = log\ x$ فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا :

29 . أثبت أن : $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\ ln\ 10}$

الحل : قاعدة : $log\ x = \frac{ln\ x}{ln\ 10}$

$y = log\ x = \frac{ln\ x}{ln\ 10} = \frac{1}{ln\ 10}\ ln\ x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{ln\ 10} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x\ ln\ 10}$

30 . مُعتمِدًا على النتيجة من السؤال السابق، أجد $\frac{dy}{dx}$ للاقتران $y = log\ ax^2$ ، حيث a عدد حقيقي موجب .

الحل :

$y = log\ ax^2 = log\ a + log\ x^2$

$= log\ a + 2log\ x$

$y' = 0 + \frac{2}{x\ ln\ 10} = \frac{2}{x\ ln\ 10}$

T. Haitham Harb
JoSchool-Online
0797771137

تبرير: يمثل الاقتران $s(t) = 4 - sin\ t\ ,\ t \geq 0$ موقع جسيم يتحرك على خط مستقيم حيث :

s الموقع بالامتار، t الزمن بالثواني

31 . أجد سرعة الجسيم وتسارعه بعد t ثانية .

الحل :

$s(t) = 4 - sin\ t$

$v(t) = s'(t) = -cos\ t$

$a(t) = v'(t) = sin\ t$

32 . أجد موقع الجسيم عندما كان في حالة سكون لحظي أول مرة بعد انطلاقه .

الحل : حالة سكون يعني $v(t) = 0$

$-cos\ t = 0 \quad \rightarrow \quad t = \frac{\pi}{2}\ ,\frac{3\pi}{2}\ ,\frac{5\pi}{2}\ , \ldots$

يكون الجسم في حالة سكون لأول مرة بعد انطلاقه عندما $t = \frac{\pi}{2}$

المطلوب : موقع الجسم عندما $t = \frac{\pi}{2}$

$s\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 - sin\ \frac{\pi}{2}$

$= 4 - 1$

$= 3\ m$

33 . أجد موقع الجسيم عندما يكون تسارعه صفراً ، مبرراً إجابتي .

الحل :

$a(t) = v'(t) = \sin t$

$a(t) = 0$

$\sin t = 0$

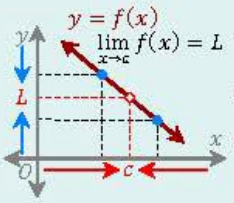
وبتعويض هذه النتيجة في اقتران الموقع نجد أن :

$s(t) = 4 - \sin t = 4 - 0 = 4$

أي ان الجسيم يكون عند عندما يكون تسارعه صفراً

T. Haitham Harb
JoSchool-Online
0797771137

تقدير النهايات بيانيا



- النهاية من اليمين $\lim_{x \to c^+} f(x) = L_1$: تعني قيمة الاقتران عند اقتراب قيم x من العدد c من اليمين.
- النهاية من اليسار $\lim_{x \to c^-} f(x) = L_2$: تعني قيمة الاقتران عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار.
- النهاية عند نقطة ..
  - إذا كانت $\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) = L$ فإن $\lim_{x \to c} f(x) = L$
  - إذا كانت $\lim_{x \to c^+} f(x) \neq \lim_{x \to c^-} f(x)$ فإن $\lim_{x \to c} f(x)$ غير موجودة
- مثال توضيحي: من الشكل ..

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$

و $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$

وبما أن ..

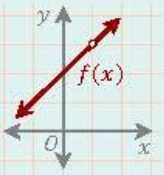
$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$ فإن $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$

النهايات والاتصال عند نقطة

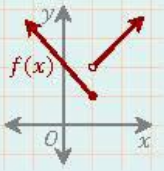
- تكون الاقتران $f(x)$ متصلة عند $x = a$ إذا كان ..

$$f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

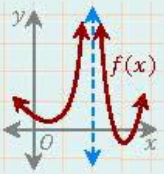
- أنواع عدم الاتصال ..



قابل للإزالة: الاقتران متصل عند كل نقطة في مجالها باستثناء نقطة واحدة، ويشار إليها بدائرة صغيرة (○).



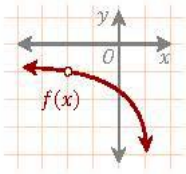
قفزي: نهايتا الاقتران عندما تقترب من نقطة عدم الاتصال من اليمين واليسار موجودتين لكنهما غير متساويتين.



لا نهائي: تتزايد قيم الاقتران أو تتناقص بلا حدود عندما تقترب الاقتران من نقطة عدم الاتصال من اليمين أو اليسار.

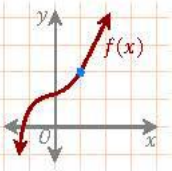
08	07	06	05	04	03	02	01
C	C	A	D	D	A	D	B

في الشكل نُقدِّر $\lim_{x \to -2} f(x)$ بـ ..



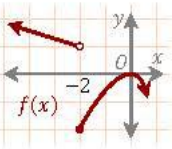
A -2 B -1
C 0 D غير موجودة

في الشكل نُقدِّر $\lim_{x \to 1} f(x)$ بـ ..



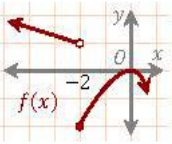
A -1 B 0
C 1 D 2

في الشكل نُقدِّر $\lim_{x \to -2^+} f(x)$ بـ ..



A -2 B 0
C 1 D غير موجودة

في الشكل نُقدِّر $\lim_{x \to -2} f(x)$ بـ ..



A -2 B 0
C 1 D غير موجودة

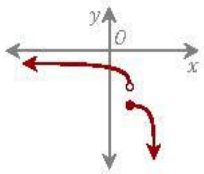
إذا كانت $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 5$ و $\lim_{x \to 3^-} f(x) = -5$ و $f(3) = 7$ ؛ فإن قيمة $\lim_{x \to 3} f(x)$ تساوي ..

A 3 B 5
C 7 D غير موجودة

إذا كانت $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , x \geq 2 \\ kx + 1 & , x < 2 \end{cases}$ متصلة عند $x = 2$ فما قيمة k ؟

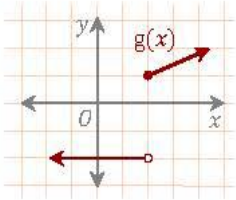
A 2 B -2
C 3 D -3

التمثيل البياني يمثل دالة غير متصلة، ما نوع عدم الاتصال؟



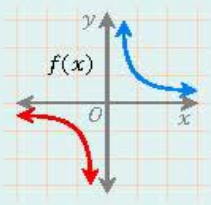
A لا نهائي B نقطي
C قفزي D قابل للإزالة

في الشكل ما نوع عدم الاتصال للدالة $g(x)$ عند النقطة $x = 2$ ؟



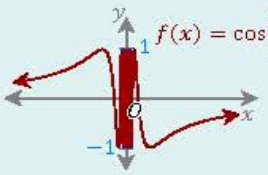
A انفصالي B لا نهائي
C قفزي D قابل للإزالة

النهايات وسلوك الاقتران



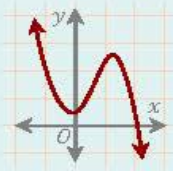
النهايات والسلوك غير المحدد: إذا زادت قيم $f(x)$ بشكل غير محدود عند اقتراب x من العدد c فإن $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$

وإذا نقصت قيم $f(x)$ بشكل غير محدود عند اقتراب x من العدد c فإن $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$.



النهايات والسلوك التذبذبي: إذا كانت قيم $f(x)$ تتذبذب بين قيمتين مختلفتين باقتراب قيم x من c فإن $\lim_{x\to c} f(x)$ غير موجودة.

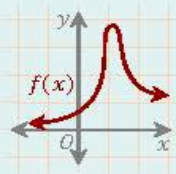
النهايات وسلوك طرفي التمثيل البياني



سلوك الطرف الأيمن .. $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

سلوك الطرف الأيسر .. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

فائدة: من الممكن أن يقترب الطرف الأيمن أو الطرف الأيسر لبعض الاقترانات من عدد حقيقي.



سلوك الطرف الأيمن .. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$

سلوك الطرف الأيسر .. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

حساب النهايات جبريًا

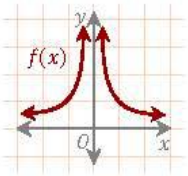
نهايات الاقترانات الثابتة .. $\lim_{x\to c} k = k$ فمثلًا $\lim_{x\to-3} 5 = 5$

نهاية الاقتران المحايدة .. $\lim_{x\to c} x = c$ فمثلًا $\lim_{x\to 7} x = 7$

نهايات الاقترانات بشكل عام: بالتعويض المباشر، فمثلًا ..

$$\lim_{x\to 4}(4x-1) = 4(4) - 1 = 16 - 1 = 15$$

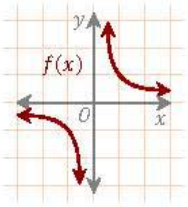
17	16	15	14	13	12	11	10	09
B	D	B	B	B	D	D	D	C



في الشكل نُقدِّر $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ بـ ..

A $-\infty$ B 0

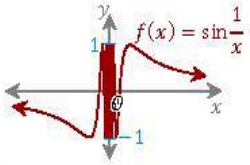
C $+\infty$ D غير موجودة



في الشكل نُقدِّر $\lim_{x\to 0} f(x)$ بـ ..

A $-\infty$ B 0

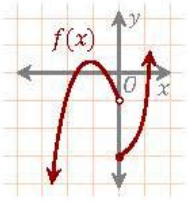
C $+\infty$ D غير موجودة



في الشكل نُقدِّر $\lim_{x\to 0} f(x)$ بـ ..

A $-\infty$ B 0

C $+\infty$ D غير موجودة



يمكن وصف سلوك الطرف الأيسر للدالة $f(x)$ في الشكل بـ ..

A $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ B $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

C $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ D $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

ما قيمة $\lim_{x\to 2}(x^2 - 3x + 1)$ ؟

A -2 B -1

C 1 D 2

$\lim_{x\to 5}(3x^3 - 5x^2 - 3x - 10)$ تساوي ..

A 125 B 225

C 275 D 235

ما قيمة $\lim_{x\to 0}(4^x - \cos x + 2x - 1)$ ؟

A -2 B -1

C 1 D 2

ما قيمة $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x+6}{x-1}$ ؟

A 4 B 0

C -2 D -4

ما قيمة $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{7}}{x-3}$ ؟

A $3+\sqrt{7}$ B $3-\sqrt{7}$

C $\sqrt{7}-3$ D 3

الصيغة غير المحددة

- الصيغة غير المحددة $\frac{0}{0}$: تنتج من التعويض المباشر لبعض نهايات الاقترانات النسبية.
- طرق معالجة الصيغة غير المحددة $\frac{0}{0}$ ..
  - نحلل البسط أو المقام أو كليهما، ثم نختصر العوامل المشتركة، فمثلاً ..

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\frac{1-3(1)+2}{1-1}=\frac{0}{0}$$

نحلل البسط بالبحث عن عددين مجموعهما -3 وحاصل ضربهما $+2$ ، وهما -2 و -1 ..

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}(x-2)$$
$$=1-2=-1$$

  - نضرب كلًا من البسط والمقام بمرافق البسط للتخلص من الجذر التربيعي في البسط، أو بمرافق المقام للتخلص من الجذر التربيعي في المقام.
  - للتذكير: مرافق $\sqrt{x}+3$ هو $\sqrt{x}-3$ ، وحاصل ضربهما $x-9$ (تربيع الأول - تربيع الثاني).

نهايات الاقترانات عند المالانهاية

- أهم خصائص $+\infty$ و $-\infty$ ..
  - إذا أضفنا إليهما أو طرحنا منهما أي عدد فإنهما لا يتغيران.
  - إذا ضربناهما أو قسمناهما على أي عدد عدا الصفر فإنهما لا يتغيران، لكن تنطبق عليهما قواعد الإشارات.
  - إذا قسمنا أي عدد عليهما يكون الناتج صفرًا.
  - إذا رفعناهما لأس سالب يكون الناتج صفرًا.
  - إذا رفعناهما لأس موجب فإنهما لا يتغيران، لكن تنطبق عليهما قواعد الإشارات.
- نهايات الاقترانات كثيرات الحدود عند المالانهاية: نعوض تعويضًا مباشرًا في الحد الرئيس (الحد ذي القوة الأكبر) فقط ..

$$\lim_{x\to\infty}(4x^6+3x^5)=\lim_{x\to\infty}4x^6=4(\infty)^6$$
$$=4(\infty)=\infty$$

26	25	24	23	22	21	20	19	18
D	A	D	A	C	C	C	D	C

..$\lim_{x\to 5}\left(\frac{x+1}{x^2+3}\right)$ تساوي

A 5 | B $\frac{5}{28}$
C $\frac{3}{14}$ | D 28

..$\lim_{x\to -1}\frac{4-\sqrt{x^2+x+16}}{x^3-1}$ تساوي

A $\frac{1}{8}$ | B $\frac{1}{12}$
C ∞ | D 0

ما قيمة $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$ ؟

A 0 | B 6
C 4 | D 8

..$\lim_{x\to 0}\frac{(x+3)^2-9}{x}$ تساوي

A 0 | B 3
C 6 | D غير موجودة

..$\lim_{x\to 25}\frac{x-25}{\sqrt{x}-5}$ تساوي

A -5 | B 0
C 10 | D 25

..$\lim_{x\to -\infty}x^5$ تساوي

A $-\infty$ | B 0
C 2 | D $+\infty$

..$\lim_{x\to\infty}(x^2+x+2)$ تساوي

A $-\infty$ | B 0
C 1 | D ∞

..$\lim_{x\to -\infty}(x^3-2x^2+5x-1)$ تساوي

A $-\infty$ | B 0
C 2 | D $+\infty$

..$\lim_{x\to -\infty}(4x^6+3x^5-x)$ تساوي

A $-\infty$ | B 0
C 2 | D $+\infty$

▼ (17) الاشتقاق والتكامل ▼

مشتقة الدالة $f(x) = -2$ تساوي ..

A -2 B 0
C 2 D $2x$

إذا كانت $f(x) = 3x^2 - 5x + 12$ فإن مشتقة الدالة $f(x)$ تساوي ..

A $3x - 5$ B $6x^2 - 5$
C $6x^2 - 5x$ D $6x - 5$

ما معادلة ميل المنحنى $y = x^5 + 3x - 2$ عند أي نقطة عليه؟

A $5x^4 + 3$ B $4x^4 + 3x$
C $x^4 + 1$ D $x^4 + 3$

إذا كانت $f(x) = 3x^{\frac{4}{3}} + 6x^{\frac{1}{2}} - 10$ فإن $f'(x)$ تساوي ..

A $4x^{\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{1}{2}}$ B $4\sqrt[3]{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}$
C $3x^{\frac{7}{3}} + 3x^{-\frac{1}{2}}$ D $4\sqrt[4]{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}$

إذا كانت $g(x) = \sqrt[5]{x^9}$ فإن $g'(x)$ تساوي ..

A $9\sqrt[5]{x^8}$ B $5\sqrt[4]{x^9}$
C $\frac{5}{9}\sqrt[5]{x^4}$ D $\frac{9}{5}\sqrt[5]{x^4}$

ما مشتقة الدالة $f(x) = 15x^2 - 5x + 7$ عند $x = 1$ ؟

A 32 B 25
C 17 D 10

ما المشتقة الثانية للدالة $f(x) = 2x^5 - x^3 + 6$ ؟

A $10x^4 - 3x^2$ B $40x^4 - 6x$
C $40x^3 - 6$ D $40x^3 - 6x$

ما المشتقة السادسة للدالة التالية؟

$$f(x) = \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7x - 12$$

A -1 B 0
C 1 D 3

قواعد أساسية في الاشتقاق

- ميل المماس (معادلة ميل المنحنى) عند أي نقطة على منحنى الاقتران يسمى مشتقة الاقتران
- رموز مشتقة الاقتران $y = f(x)$ بالنسبة للمتغير x ..

$$f'(x) \ , \ \frac{dy}{dx} \ , \ \frac{df}{dx} \ , \ y'$$

- مشتقة الثابت ..

$$f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$$

- مثال توضيحي: $f(x) = \sqrt{7} \Rightarrow f'(x) = 0$
- مشتقة القوة ..

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

- مثال توضيحي: $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$
- مشتقة مضاعفات القوة ..

$$f(x) = cx^n \Rightarrow f'(x) = ncx^{n-1}$$

- مثال توضيحي: $f(x) = 7x^{-2}$

$$\Rightarrow f'(x) = 7(-2x^{-3}) = -14x^{-3}$$

- مشتقة المجموع والفرق ..

إذا كانت $f(x) = g(x) \pm h(x)$ فإن ..

$$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

- مثال توضيحي: $f(x) = 3x^2 - 5x + 12$

$$\Rightarrow f'(x) = 2(3x) - 5 + 0 = 6x - 5$$

- فائدة1: إذا أعطانا السؤال صيغة جذرية مثل $\sqrt[3]{x^7}$ فإننا نحولها إلى الصيغة الأسية $x^{\frac{7}{3}}$.
- فائدة2: لإيجاد $f'(a)$ للاقتران $f(x)$ نُوجد المشتقة $f'(x)$ ثم نُعوض بـ a بدلاً من x في المشتقة.
- مثال توضيحي: $f(x) = x^2 - 1$ ..

$$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(5) = 2(5) = 10$$

- المشتقات العليا: للحصول على المشتقة الثانية (رمزها $f''(x)$ أو $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$) نشتق مشتقة الاقتران وللحصول على المشتقة الثالثة نشتق المشتقة الثانية، ... وهكذا.

في المشتقات العليا لكثيرات الحدود: إذا كانت رتبة المشتقة العليا المطلوبة أكبر من درجة كثيرة الحدود فإن المشتقة تساوي الصفر دائمًا

08	07	06	05	04	03	02	01
B	D	B	D	B	A	D	B

مشتقة ضرب وقسمة اقترانين

مشتقة ضرب اقترانين

(مشتقة الثانية)(الأولى) + (الثانية)(مشتقة الاولى)

مثال توضيحي: إذا كانت $f(x) = x(x^2 - 3)$

فإن ..

$$f'(x) = (1)(x^2 - 3) + (x)(2x)$$
$$= x^2 - 3 + 2x^2 = 3x^2 - 3$$

مشتقة قسمة اقترانين

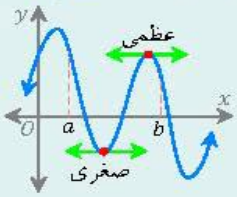
$$\frac{(\text{مشتقة المقام})(\text{البسط}) - (\text{المقام})(\text{مشتقة البسط})}{(\text{المقام})^2}$$

مثال توضيحي: إذا كانت $f(x) = \frac{x}{x^2-3}$

فإن ..

$$f'(x) = \frac{(1)(x^2 - 3) - (x)(2x)}{(x^2 - 3)^2}$$
$$= \frac{x^2 - 3 - 2x^2}{(x^2 - 3)^2} = \frac{-x^2 - 3}{(x^2 - 3)^2}$$

النقطة الحرجة ونظرية القيمة القصوى



النقطة الحرجة: النقطة التي تكون عندها المشتقة مساوية للصفر أو غير معرفة.

النقطة الحرجة قد تُشير لوجود قيمة عظمى أو صغرى للدالة.

عند النقطة الحرجة: المماس يوازي المحور x (ميله = صفرًا).

نظرية القيمة القصوى: إذا كانت $f(x)$ متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$ فإن لها قيمة عظمى وصغرى على الفترة $[a,b]$ ، وذلك إما عند طرفي الفترة أو عند إحدى النقاط الحرجة.

لتعيين القيم العظمى والصغرى لدالة على فترة مغلقة نشتق الدالة، ثم نساويها بالصفر لإيجاد النقط الحرجة، ثم نعوض في الدالة بالنقط الحرجة وبأطراف الفترة.

14	13	12	11	10	09
B	C	D	C	D	C

إذا كانت $f(x) = (x^2 - 4)(2x - 5)$ فإن $f'(x)$ تساوي ..

A $4x^2 - 10x$

B $x^2 - 8$

C $6x^2 - 10x - 8$

D $2x^2 - 10x - 4$

إذا كانت $f_1(x) = \sin x$ و $f_2(x) = \cos x$ ، وكانت المشتقة الأولى للدالة المثلثية $\sin x$ هي $\cos x$ ، والمشتقة الأولى للدالة المثلثية $\cos x$ هي $-\sin x$ ؛ فإن المشتقة الأولى لحاصل الضرب $f_1(x) \cdot f_2(x)$ يساوي ..

A $\sin^2 x$

B $\sin^2 x + \cos^2 x$

C $-\cos^2 x$

D $\cos^2 x - \sin^2 x$

إذا كانت $f(x) = \frac{7}{x+5}$ فإن $f'(x)$ تساوي ..

A $\frac{-7}{x+5}$

B $\frac{7}{x+5}$

C $\frac{-7}{(x+5)^2}$

D $\frac{7}{(x+5)^2}$

للدالة $f(x) = 8x - x^2 + 30$ نقطة حرجة عندما x تساوي ..

A -4

B $-\frac{1}{4}$

C $\frac{1}{4}$

D 4

إذا كانت $f(x) = 6x^2 - x^3$ فما القيمة العظمى للدالة $f(x)$ في الفترة $[0,3]$ ؟

A 64

B 32

C 27

D 21

قذف حارس مرمى الكرة لأعلى، فإذا كانت المسافة الرأسية التي تقطعها الكرة بالمتر بعد t ثانية $s(t) = 20t - 2t^2 + 3$ ؛ فما أقصى مسافة يمكن أن ترتفعها الكرة قبل أن تسقط؟

A 153

B 53

C 50

D 5

مشتقتا الضرب والقسمة والمشتقات العليا

مشتقة ضرب اقترانين

تعلَّمْتُ سابقًا إيجاد مشتقات إقترانات مختلفة، مثل :

إقترانات القوَّة، والاقتران الأُسِّي الطبيعي، والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي ، و اقتران الجيب ، و اقتران جيب التمام. تعلَّمْتُ أيضًا إيجاد مشتقات مضاعفات هذه الاقترانات والاقترانات الناتجة من جمعها وطرحها .

ولكنْ ، كيف يُمكِن إيجاد مشتقات الاقترانات الناتجة من ضرب هذه الاقترانات؟ فمثلًا، إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق، فكيف يُمكِن إيجاد مشتقة $f(x)g(x)$

يُمكِن استعمال التعريف العام للمشتقة لإيجاد قاعدة مشتقة حاصل ضرب اقترانين. فمثلً، إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين

للاشتقاق، وكان $A(x) = f(x)g(x)$: فإنَّه يُمكِن إيجاد مشتقة $A(x)$ على النحو الآتي :

$$A(x) = \lim_{h\to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}$$

بتعويض $A(x) = f(x)g(x)$

$$A'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h).g(x+h) - f(x+h)\,g(x) + f(x+h)\,g(x) - f(x).g(x)}{h}$$

$$A'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h).g(x+h) - f(x+h)g(x)}{h} + \frac{f(x+h).g(x) - f(x)g(x)}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)\big(g(x+h) - g(x)\big)}{h} + \frac{g(x).\big(f(x+h) - f(x)\big)}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= f(x)\ .\ g'(x) + g(x)\ .\ f'(x)$$

$$\therefore\quad A'(x) = f(x).g'(x) + g(x).f'(x)$$

أتذكر :

بما ان f, g قابلان للاشتقاق ، فإنهما متصلان أيضاً .

اذن :

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$$

$$\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$$

نظرية — مشتقة الضرب

بالكلمات: مشتقة ضرب اقترانين قابلين للاشتقاق هي الاقتران الأوَّل مضروبًا في مشتقة الاقتران الثاني، ثم يضاف إليه الاقتران الثاني مضروبًا في مشتقة الاقتران الأوَّل.

بالرموز: إذا كان الاقتران $f(x)$ والاقتران $g(x)$ قابلين للاشتقاق، فإنَّ $f(x)g(x)$ قابل للاشتقاق أيضًا، وتكون مشتقته على النحو الآتي:

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

مثال 1

صفحة 29

1) $f(x) = (3x - 2x^2)(5 + 4x)$

الحل :

$$f'(x) = (3x - 2x^2)\frac{d}{dx}(5 + 4x) + (5 + 4x)\frac{d}{dx}(3x - 2x^2)$$

$$f'(x) = (3x - 2x^2)(4) + (5 + 4x)(3 - 4x)$$

$$f'(x) = (12x - 8x^2) + (15 - 8x - 16x^2)$$

$$f'(x) = -24x^2 + 4x + 15$$

---

2) $f(x) = xe^x$

الحل :

$$f'(x) = (x)\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x)$$

$$f'(x) = xe^x + e^x(1)$$

$$f'(x) = xe^x + e^x$$

---

4) $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)(7x^2 - 4x)$

الحل :

$$f'(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)\frac{d}{dx}(7x^2 - 4x) + (7x^2 - 4x)\frac{d}{dx}(x^3 - 2x^2 + 3)$$

$$f'(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)(14x - 4) + (7x^2 - 4x)(3x^2 - 4x)$$

$$f'(x) = 14x^4 - 28x^3 + 42x - 4x^3 + 8x^2 - 12 + 21x^4 - 28x^3 - 12x^3 + 16x^2$$

$$f'(x) = 35x^4 - 72x^3 + 24x^2 + 42x - 12$$

5) $f(x) = (\ln x)(\cos x)$

$$f'(x) = (\ln x)\frac{d}{dx}(\cos x) + (\cos x)\frac{d}{dx}(ln\ x)$$

$$f'(x) = (\ln x)(-\sin x) + (\cos x)\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = -\ln x \sin x + \frac{\cos x}{x}$$

مشتقة قسمة اقترانين

مشتقة قسمة اقترانين ليست حاصل قسمة مشتقة كلٍّ منهما، مثلما أنَّ مشتقة ضرب اقترانين ليست حاصل ضرب مشتقة كلٍّ منهما .

يُمكِن استعمال التعريف العام للمشتقة لإيجاد قاعدة مشتقة حاصل قسمة اقترانين. فمثلاً ، إذا كان $f(x)$, $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق وكان $A(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ، فإنَّه يُمكِن إيجاد مشتقة $A(x)$ على النحو الآتي .

$$A'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{A(x+h) - A(x)}{h}$$

$$A'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$A'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\,.\,g(x) - f(x)\,.\,g(x+h)}{g(x)\,.\,g(x+h)}\cdot\frac{1}{h}}{h\,.\,\frac{1}{h}}$$

$$A'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\,.\,g(x) - f(x)\,.\,g(x+h)}{g(x)\,.\,g(x+h)\,.\,h}$$

$$A'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h).g(x) - g(x).f(x)) + (g(x).f(x) - f(x).g(x+h))}{g(x)\,.\,g(x+h)\,.\,h}$$

Mr. Haitham Harb
JoSchool-Online
0797771137

$$A'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x)\big(f(x+h).-f(x)\big)+f(x)\big(g(x)-g(x+h)\big)}{g(x)\,.\,g(x+h)\,.\,h}$$

$$A'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{g(x)\big(f(x+h).-f(x)\big)+f(x)\big(g(x)-g(x+h)\big)}{h}}{\frac{g(x)\,.\,g(x+h)\,.\,h}{h}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{g(x)\big(f(x+h).-f(x)\big)}{h}+\frac{f(x)\big(g(x)-g(x+h)\big)}{h}}{g(x)\,.\,g(x+h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{g(x)\big(f(x+h).-f(x)\big)}{h}-\frac{f(x)\big(g(x+h)-g(x)\big)}{h}}{g(x)\,.\,g(x+h)}$$

$$=\frac{\lim_{h\to 0}g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h).-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{\lim_{h\to 0}g(x)\,.\,\lim_{h\to 0}g(x+h)}$$

$$A'(x)=\frac{g(x)\,f'(x)-f(x)g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}$$

نظرية — مشتقة القسمة

بالكلمات: مشتقة قسمة اقترانين قابلين للاشتقاق هي المقام في مشتقة البسط مطروحًا منه البسط في مشتقة المقام، ثم قسمة الجميع على مربع المقام.

بالرموز: إذا كان الاقتران $f(x)$ والاقتران $g(x)$ قابلين للاشتقاق، وكان $g(x)\neq 0$، فإنَّ $\frac{f(x)}{g(x)}$ قابل للاشتقاق أيضًا، وتكون مشتقته على النحو الآتي:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{g(x)\times f'(x)-f(x)\times g'(x)}{(g(x))^2}$$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

مثال 2

صفحة 29

$$1)\ f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$f'(x)=\frac{(1+x^2)(-2x)-(1-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-2x-2x^3-(2x-2x^3)}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-2x-2x^3-2x+2x^3}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

$$2)\ f(x)=\frac{\ln x}{1+x}$$

$$f'(x)=\frac{(1+x)\left(\frac{1}{x}\right)-(\ln x)(1)}{(1+x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1+\frac{1}{x}-ln\,x}{(1+x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1+x-x\,ln\,x}{x(1+x)^2}$$

$$3)\ f(x)=\frac{x+1}{2x+1}$$

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(1)-(x+1)(2)}{(2x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x+1-(2x+2)}{(2x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x+1-2x-2}{(2x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-1}{(2x+1)^2}$$

$$4)\ f(x)=\frac{\sin x}{e^x}$$

$$f'(x)=\frac{e^x(\cos x)-\sin x\,(e^x)}{(e^x)^2}$$

0797771137

$$f'(x) = \frac{e^x(\cos x - \sin x)}{(e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{e^x}$$

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ المشتقة هي مُعدَّل تغيُّر كمية بالنسبة إلى كمية أُخرى عند لحظة مُعيَّنة. فمثلا ، إيجاد $\frac{dy}{dx}$ يعني إيجاد مُعدَّل تغيُّر y بالنسبة إلى x

تتغيَّر القِيَم في كثير من المواقف الحياتية بالنسبة إلى الزمن . فمثلا ، إذا كان r كمية مُعيَّنة ؛ فإنَّ مُعدَّل تغيُّرها بالنسبة إلى الزمن t هو $\frac{dr}{dt}$

مثال 3
من الحياة
صفحة 31

تعطى درجة حرارة مريض اثناء مرضه بالاقتران $T(t) = \frac{4t}{1+t^2} + 98.6$ حيث t الزمن بالساعات بعد ظهور اعراض المرض و T درجة الحرارة بالفهرنهايت

a) جد معدل تغير درجة الحرارة بالنسبة الى الزمن .

الحل : أجد $T'(t)$

$$T(t) = \frac{4t}{1+t^2} + 98.6$$

$$T'(t) = \frac{(1+t^2)(4) - 4t(2t)}{(1+t^2)^2} + 0$$

$$T'(t) = \frac{4 + 4t^2 - 8t^2}{(1+t^2)^2}$$

$$T'(t) = \frac{4 - 4t^2}{(1+t^2)^2}$$

b) جد معدل تغير درجة الحرارة المريض عندما $t = 2$. مفسراً معنى الناتج .

الحل : أجد $T'(2)$

$$T'(t) = \frac{4 - 4t^2}{(1+t^2)^2}$$

$$T'(2) = \frac{4 - 4(2)^2}{(1+2^2)^2}$$

$$= \frac{-12}{25}$$

$$= -0.48$$

اذن عندما يكون الزمن $2h$ (بعد مرور ساعتين) فإن درجة حرارة المريض تقل بمقدار 0.48 درجة

فهرنهايتية لكل ساعة

اتحقق من فهمي
صفحة 32

يعطى عدد سكان مدينة صغيرة بالاقتران $p(t) = \frac{500t^2}{2t+9}$ حيث t الزمن بالسنوات و p عدد السكان الالاف .

a) أجد مُعدَّل تغيُّر عدد السكّان في المدينة بالنسبة إلى الزمن .

الحل : أجد $P'(t)$

$$P(t) = \frac{500t^2}{2t+9}$$

$$P'(t) = \frac{(2t+9)(1000t) - 500t^2(2)}{(2t+9)^2}$$

Mr. Haitham Harb
JoSchool Online
0797771137

$$P'(t) = \frac{2000t^2 + 9000t - 1000t^2}{(2t+9)^2}$$

$$P'(t) = \frac{1000t^2 + 9000t}{(2t+9)^2}$$

b) جد معدل تغير عدد السكان في المدينة عندما $t = 12$. مفسراً معنى الناتج .

الحل : أجد $P'(12)$

$$P'(t) = \frac{1000t^2 + 9000t}{(2t+9)^2}$$

$$P'(12) = \frac{1000(12)^2 + 9000(12)}{(2(12)+9)^2}$$

$$\approx 231$$

اذن عندما يكون الزمن $12\ h$ (بعد مرور 12 ساعة)

فإن عدد السكان يزداد بمقدار 231 تقريباً

مشتقة المقلوب

يُمكِن إيجاد قاعدة عامة لمشتقة مقلوب أيِّ اقتران باستعمال قاعدة القسمة . فمثلاً، إذا كان $f(x)$ اقتراناً قابلاً للاشتقاق ، حيث $f(x) \neq 0$ ، وكان $A(x) = \frac{1}{f(x)}$ ، فإن :

$$A'(x) = \frac{f(x) \times 0 - 1 \times f'(x)}{(f(x))^2}$$

$$\boxed{A'(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}}$$

نظرية — مشتقة المقلوب

بالكلمات: مشتقة مقلوب اقتران قابل للاشتقاق هي سالب مشتقة الاقتران مقسومًا على مربع الاقتران.

بالرموز: إذا كان الاقتران $f(x)$ قابلًا للاشتقاق، حيث: $f(x) \neq 0$، فإنَّ $\frac{1}{f(x)}$ قابل للاشتقاق أيضًا، وتكون مشتقته على النحو الآتي:

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$$

مثال 4

صفحة 33

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

1) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$f'(x) = \frac{-\frac{d}{dx}(1+x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

---

2) $f(t) = \frac{1}{t + \frac{1}{t}}$

$$f'(t) = \frac{-\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2} = \frac{-1+\frac{1}{t^2}}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{-t^2+1}{t^2}}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}$$

$$= \frac{1-t^2}{t^2\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}$$

Dr. Haitham Harb
JoSchool-Online
0797771137

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

اتحقق من فهمي صفحة 333

1) $f(x) = \dfrac{1}{5x - x^2}$

$$f'(x) = \frac{-1(5-2x)}{(5x-x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-5+2x}{(5x-x^2)^2}$$

---

2) $f(x) = \dfrac{1}{e^x + \sqrt{x}}$

$$f'(x) = \frac{-1\left(e^x + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)}{\left(e^x + x^{\frac{1}{2}}\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-e^x - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(e^x + \sqrt{x}\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2\sqrt{x}\,e^x - 1}{2\sqrt{x}\left(e^x + \sqrt{x}\right)^2}$$

مشتقات الاقترانات المثلثية

تعلَّمْتُ في الدرس السابق كيفية إيجاد مشتقة اقتران الجيب، ومشتقة اقتران جيب التمام .

وسأتعلَّم الآن كيف أجد مشتقات الاقترانات المثلثية باستعمال مشتقة القسمة. فمثلًا ، لإيجاد مشتقة اقتران الظلِّ، أفترض أنَّ $f(x) = \tan x$ وباستعمال مشتقة القسمة، فإنَّ :

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x\,(\cos x) - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \sec^2 x$$

نظرية مشتقات الاقترانات المثلثية

$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ $\quad$ $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$ $\quad$ $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

Mr. Haitham Harb JoSchool-Online 0797771137

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

مثال 5

صفحة 34

$$1)\ f(x) = x^3 \sec x$$

$$f'(x) = x^3(\sec x \tan x) + (\sec x)(3x^2)$$

$$= x^3 \sec x \tan x + 3x^2 \sec x$$

$$2)\ f(x) = \frac{\csc x}{1 + \tan x}$$

$$f'(x) = \frac{(1 + \tan x)(-\csc x \cot x) - \csc x \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}$$

$$= \frac{-\csc x \cot x - \csc x \cot x \tan x - \csc x \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-\csc x \cot x - \csc x - \csc x \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}$$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

اتحقق من فهمي

صفحة 35

$$1)\ f(x) = x \cot x$$

$$f'(x) = x(-\csc^2 x) + (\cot x)(1)$$

$$= -x \csc^2 x + \cot x$$

$$2)\ f(x) = \frac{\tan x}{1 + \sin x}$$

$$f'(x) = \frac{(1 + \sin x)(\sec^2 x) - (\tan x)(\cos x)}{(1 + \sin x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\sec^2 x + \sin x \sec^2 x - \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)(\cos x)}{(1 + \sin x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\sec^2 x + \sin x \sec^2 x - \sin x}{(1 + \sin x)^2}$$

المشتقات العليا

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّه إذا كان الاقتران $f(x)$ قابلًا للاشتقاق ، فإنَّ المشتقة $f'(x)$ هي اقتران أيضًا ، ومن المُمكِن إيجاد مشتقته ، التي يُرمَز إليها بالرمز $f''(x)$ وفي هذه الحالة، يُطلَق على الاقتران الجديد $f''(x)$ اسم المشتقة الثانية للاقتران $f(x)$

إذا كان الاقتران $f''(x)$ قابلًا للاشتقاق ، فإنَّه يُرمَز إلى مشتقته بالرمز $f'''(x)$ ، وتُسمّى المشتقة الثالثة للاقتران $f(x)$ ويستمر إيجاد المشتقات وتسمياتها على النحو نفسه، ويُستعمَل الرمز $f^{(n)}(x)$ للدلالة على المشتقة $n^{th}\ derivative$

تستعمل الرموز y'' ، $\frac{d^2y}{dx^2}$ ، $\frac{d^2}{dx^2}(f(x))$ للتعبير عن المشتقة الثانية

تستعمل الرموز $y^{(n)}$ ، $\frac{d^ny}{dx^n}$ ، $\frac{d^n}{dx^n}(f(x))$ للتعبير عن المشتقة (n)

Joschool-Online
0797771137
أ. Haitham Harb

مثال 6
صفحة 36

أجد المشتقات الأربعة الأولى للاقتران

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$$

الحل :

1. $f'(x) = 2x - \frac{(-1)(1)}{x^2}$

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$$

2. $f''(x) = 2 + \frac{(-1)(2x)}{x^4}$

$$f''(x) = 2 - \frac{2x}{x^4}$$

$$f''(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$$

3. $f'''(x) = 0 + \frac{-(-2)(3x^2)}{x^6}$

$$f''(x) = \frac{+6x^2}{x^6} = \frac{6}{x^4}$$

4. $f^{(4)}(x) = \frac{(-6)(4x^3)}{x^8}$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-24x^3}{x^8} = \frac{-24}{x^5}$$

T. Haitham Hrb
JoSchool-Online
0797771137

أجد المشتقات الثلاثة الأولى للاقتران $f(x) = x \sin x$

* $f'(x) = x(\cos x) + (\sin x)(1) \quad \rightarrow \quad f'(x) = x\cos x + \sin x$

* $f''(x) = x(-\sin x) + (\cos x)(1) + \cos x$

  $f''(x) = -x \sin x + 2 \cos x$

* $f^{(3)}(x) = -[x(\cos x) + (\sin x)(1)] - 2 \sin x$
* $f^{(3)}(x) = -x\cos x - \sin x - 2 \sin x$
* $f^{(3)}(x) = -x\cos x - 3\sin x$

0797771137

أتدرّب وأحُلُّ المسائل

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

1) $f(x) = \dfrac{x^3}{2x-1}$

الحل :

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(3x^2) - (x^3)(2)}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x^3 - 3x^2 - 2x^3}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^3 - 3x^2}{(2x-1)^2}$$

---

2) $f(x) = x^3 \sec x$

الحل :

$$f'(x) = x^3(\sec x \tan x) + (\sec x)(3x^2)$$

$$= x^3 \sec x \tan x + 3x^2 \sec x$$

---

3) $f(x) = \dfrac{x+1}{\cos x}$

الحل :

$$f'(x) = \frac{(\cos x)(1) - (x+1)(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x + x \sin x + \sin x}{\cos^2 x}$$

4) $f(x) = e^x(\tan x - x)$

الحل :

$$f'(x) = (e^x)(\sec^2 x - 1) + (\tan x - x)(e^x)$$

$$f'(x) = e^x \sec^2 x - e^x + e^x \tan x - xe^x$$

---

5) $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{e^x}$

الحل :

$$f'(x) = \frac{(e^x)(\cos x - \sin x) - (\sin x + \cos x)(e^x)}{(e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2 \sin x}{e^x}$$

---

6) $f(x) = x^3 \sin x + x^2 \cos x$

الحل :

$$f'(x) = (x^3)(\cos x) + (\sin x)(3x^2) + (x^2(-\sin x) + (\cos x)(2x)$$

$$f'(x) = x^3 \cos x + 2x^2 \sin x + 2x \cos x$$

---

7) $f(x) = \sqrt[3]{x}(\sqrt{x} + 3)$

الحل :

$$f(x) = x^{\frac{5}{6}} + 3x^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{5}{6}x^{\frac{-1}{6}} + x^{-\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{5}{6\sqrt[6]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

T. Haitham Harb
JoSchool Online
0797771137

8) $f(x) = \dfrac{1+\sec x}{1-\sec x}$

الحل :

$$f'(x) = \frac{(1-\sec x)(\sec x \tan x) - (1+\sec x)(-\sec x \tan x)}{(1-\sec x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2\sec x \tan x}{(1-\sec x)^2}$$

---

9) $f(x) = \dfrac{2-\frac{1}{x}}{x-3}$

الحل :

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2-3x}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2-3x)(2) - (2x-1)(2x-3)}{(x^2-3x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2+2x-3}{(x^2-3x)^2}$$

---

10) $f(x) = (x^3-x)(x^2+2)(x^2+x+1)$

الحل :

$$f(x) = (x^3-x)(x^2+2)(x^2+x+1)$$

$$f'(x) = (x^3-x)\Big((x^2+2)(2x+1) + (x^2+x+1)(2x)\Big)$$

$$+ (x^2+2)(x^2+x+1)(3x^2-1)$$

$$f'(x) = (x^3-x)(x^2+2)(2x+1) + (x^3-x)(x^2+x+1)(2x)$$

$$+ (x^2+2)(x^2+x+1)(3x^2-1)$$

11) $f(x) = (\csc x + \cot x)^{-1}$

الحل :

$$f(x) = \frac{1}{\csc x + \cot x}$$

$$f'(x) = \frac{-1(-\csc x \cot x - \csc^2 x)}{(\csc x + \cot x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\csc x \cot x + \csc^2 x}{(\csc x + \cot x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\csc x\,(\cot x + \csc x)}{(\csc x + \cot x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\csc x}{\cot x + \csc x}$$

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق

عندما $x = 0$ ، وكان $f(0) = 5 \, , f'(0) = -3$

$g(0) = -1 \, , g'(0) = 2$. فأجد كُلًّ ممّا يأتي :

12) $(fg)'(0)$

الحل :

$$= f(0)g'(0) + g(0)f'(0)$$
$$= 5(2) + (-1)(-3)$$
$$= 10 + 3$$
$$= 13$$

Haitham Harb
JoSchool-Online
0797771137

$$13)\ \left(\frac{f}{g}\right)'(0)$$

الحل :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(0)=\frac{g(0)f'(0)-f(0)g'(0)}{(g(0))^2}$$

$$=\frac{(-1)(-3)-(5)(2)}{(-1)^2}$$

$$=\frac{3-10}{1}$$

$$=-7$$

$$14)\ (7f-2fg)'(0)$$

الحل :

$$=(7f)'(0)-(2fg)'(0)$$

$$=7(f)'(0)-2((fg)'(0))$$

$$=7(-3)-2(13)$$

$$=-21-26$$

$$=-47$$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة .

$$15)\ f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}\quad,\quad x=-2$$

الحل :

$$f'(x)=\frac{(x^2+4)(2x)-(x^2-4)(2x)}{(x^2+4)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^3+8x-2x^3+8x}{(x^2+4)^2}$$

$$f'(x)=\frac{16x}{(x^2+4)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(x^2+4)^2(16)-16x\left(2(x^2+4)(2x)\right)}{(x^2+4)^4}$$

$$=\frac{16(x^2+4)^2-16x(4x)(x^2+4)}{(x^2+4)^4}$$

$$=\frac{16(x^2+4)\left((x^2+4)-4x^2\right)}{(x^2+4)^4}$$

$$=\frac{16\left((x^2+4)-4x^2\right)}{(x^2+4)^3}$$

$$=\frac{16(x^2+4-4x^2)}{(x^2+4)^3}$$

$$=\frac{16(x^2+4-4x^2)}{(x^2+4)^3}=\frac{16(4-3x^2)}{(x^2+4)^3}$$

$$f'(-2)=\frac{16(4-3(-2)^2)}{((-2)^2+4)^3}$$

$$f'(-2)=\frac{16(-8)}{(8)^3}=\frac{-16}{8^2}=\frac{-2}{8}$$

T. Haitham Harb
JoSchool-Online
0797771137

$$16)\ f(x)=\frac{1+x}{1+\sqrt[3]{x}}\quad,\quad x=8$$

الحل :

$$f(x)=\frac{1+(\sqrt[3]{x})^3}{1+\sqrt[3]{x}}$$

$$f(x)=\frac{(1+\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{1+\sqrt[3]{x}}$$

$$f(x)=1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}$$

$$f(x)=1-x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x)=0-\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}+\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{3}\left(\frac{-2}{3}\right)x^{\frac{-5}{3}}+\frac{2}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)x^{\frac{-4}{3}}$$

$$f''(x)=\frac{2}{9}x^{\frac{-5}{3}}-\frac{2}{9}x^{\frac{-4}{3}}=\frac{2}{9x^{\frac{5}{3}}}-\frac{2}{9x^{\frac{4}{3}}}$$

$$f''\left(\underbrace{8}_{=2^3}\right)=\frac{2}{9(2^3)^{\frac{5}{3}}}-\frac{2}{9(2^3)^{\frac{4}{3}}}$$

$$f''(8)=\frac{2}{9(2^5)}-\frac{2}{9(2)^4}$$

$$f''(8)=\frac{1}{9(2^4)}-\frac{1}{9(2)^3}$$

$$f''(8)=\frac{1-2}{9\times 16}=\frac{-1}{144}$$

$$17)\ f(x)=\frac{1}{1+\sqrt{x}}\quad,\quad x=4$$

الحل :

$$f'(x)=\frac{-\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(1+\sqrt{x})^2}$$

$$f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2}$$

$$f''(x)=\frac{(2\sqrt{x})\left(2(1+\sqrt{x})\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)+(1+\sqrt{x})^2\left(2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)}{4x\,(1+\sqrt{x})^4}$$

$$f''(x)=\frac{2+\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{4x\,(1+\sqrt{x})^3}$$

$$f''(4)=\frac{2+\frac{1+2}{2}}{16(1+2)^3}=\frac{7}{864}$$

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند النقطة المعطاة .

$$18)\ f(x)=\frac{1+x}{1+e^x}\quad,\quad \left(0,\frac{1}{2}\right)$$

الحل :

$$f'(x)=\frac{(1+e^x)(1)-(1+x)(e^x)}{(1+e^x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1-xe^x}{(1+e^x)^2}$$

Haitham Harb
Joschool-Online
0797771137

ميل المماس عند النقطة $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ هو :

$$f'(0)=\frac{1}{4}$$

معادلة المماس هي :

$$y-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(x-0)$$

$$y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$$

---

19) $f(x)=e^x\cos x+\sin x \quad , \quad (0,1)$

الحل :

$$f'(x)=(e^x)(-\sin x)+(\cos x)(e^x)+\cos x$$

ميل المماس عند النقطة $(0,1)$ هو :

$$f'(0)=(1)(0)+(1)(1)=2$$

معادلة المماس هي :

$$y-1=2(x-0)$$

$$y=2x+1$$

أُثبِت صحة كلٍّ ممّا يأتي مُعتمِدًا أنَّ :

$$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x \quad , \quad \frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$$

20) $\frac{d}{dx}(\cot x)=-\csc^2 x$

الحل :

$$f(x)=\cot x=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$f'(x)=\frac{\sin(x)(-\sin(x))-\cos(x)(\cos(x))}{\sin^2 x}$$

$$f'(x)=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$f'(x)=\frac{-(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^2 x}$$

$$f'(x)=\frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$f'(x)=-\csc^2 x$$

---

21) $\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\tan x$

الحل :

$$f(x)=\sec x=\frac{1}{\cos(x)}$$

$$f'(x)=\frac{-1(-\sin(x))}{\cos^2 x}$$

$$f'(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$f'(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\cdot\frac{1}{\cos(x)}$$

$$f'(x)=\tan(x).\sec(x)$$

$$f'(x)=\sec(x)\tan(x)$$

Haitham Harb JoSchool Online 0797771137

22) $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

الحل :

$$f(x) = \csc x = \frac{1}{\sin(x)}$$

$$f'(x) = \frac{-1(\cos(x))}{\sin^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \cdot \frac{-1}{\sin(x)}$$

$$f'(x) = -\cot(x).\csc(x)$$

أُلاحِظ المشتقة المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي، ثم أجد المشتقة العليا المطلوبة :

23) $f''(x) = 2 - \frac{2}{x}$, $f'''(x)$

$$f'''(x) = 0 - \frac{-2(1)}{x^2}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^2}$$

24) $f'''(x) = 2\sqrt{x}$, $f^{(4)}(x)$

$$f^{(3)}(x) = 2x^{\frac{1}{2}}$$

$$f^{(4)}(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

25) $f^{(4)}(x) = 2x + 1$, $f^{(6)}(x)$

$$f^{(5)}(x) = 2$$

$$f^{(6)}(x) = 0$$

---

26) نباتات هجينة : وجد فريق بحث زراعي أنَّه يُمكِن التعبير عن ارتفاع نبتة مُهجَّنة من نبات تبّاع الشمس h بالأمتار، باستعمال الاقتران

$$h(t) = \frac{3t^2}{4 + t^2}$$

حيث t الزمن بالأشهر بعد زراعة البذور. أجد مُعدَّل تغيُّر ارتفاع النبتة بالنسبة إلى الزمن .

الحل :

$$h'(t) = \frac{(4 + t^2)(6t) - (3t^2)(2t)}{(4 + t^2)}$$

$$h'(t) = \frac{24t}{(4 + t^2)}$$

T. Haitham Harb
JoSchool-Online
0797771137

اذا كان الاقتران $y = e^x \sin x$ ، فأجب عن

السؤالين الآتيين تباعاً .

27) أجد $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{d^2y}{dx^2}$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = (e^x)(\cos x) + (\sin x)(e^x)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x(\cos x + \sin x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^x(-\sin x + \cos x) + e^x(\cos x + \sin x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2e^x \cos x$$

---

28) أثبت أن $\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx} - 2y$

الحل :

$$y = e^x \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (e^x(-\sin x) + \cos x\,(e^x)) + (e^x(\cos x) + \sin x\,(e^x))$$

$$= -e^x \sin x + e^x \cos x + e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2e^x \cos x \quad \ldots\ldots(1)$$

الان هل تساوي المعادلة ؟؟؟؟؟

$$\frac{d^2y}{dx^2} \stackrel{?}{=} 2\frac{dy}{dx} - 2y$$

$$2\frac{dy}{dx} - 2y$$

$$= 2(e^x \cos x + e^x \sin x) - 2(e^x \sin x)$$

$$= 2e^x \cos x + 2e^x \sin x - 2e^x \sin x$$

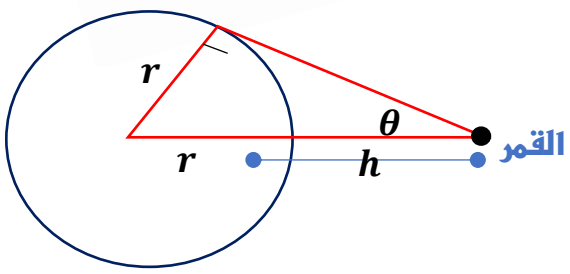
$$= 2e^x \cos x \quad \ldots\ldots(2)$$

اذا الان :

$$\frac{d^2y}{dx^2} \stackrel{?}{=} 2\frac{dy}{dx} - 2y$$

$$\underbrace{2e^x \cos x}_{\text{من (1)}} \overset{\checkmark}{=} \underbrace{2e^x \cos x}_{\text{من (2)}}$$

أقمار صناعية : عندما ترصد الأقمارُ الصناعيةُ الأرضَ ، فإنَّه يُمكِنها مسح جزء فقط من سطح الأرض . وبعض الأقمار الصناعية تحوي مُستشعِرات لقياس الزاوية θ (بالراديان) المُبيَّنة في الشكل المجاور. إذا كان h يُمثِّل المسافة بين القمر الصناعي وسطح الأرض بالكيلومتر، و r يُمثِّل نصف قُطْر الأرض بالكيلومتر، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً :



T. Haitham Harb
Toschool-Online
0797771137

29) أثبت أن $h = r(csc\,\theta - 1)$

الحل :

$$\sin\theta = \frac{r}{r+h}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta} = \frac{r}{r+h}$$

$$\frac{1}{\csc\theta} = \frac{r}{r+h}$$

$$r + h = r(\csc\theta)$$

$$-r \qquad -r$$

$$h = r\csc\theta - r$$

$$h = r(\csc\theta - 1)$$

30) أجد معدل تغير h بالنسبة الى θ عندما $\theta = \frac{\pi}{6}\ rad$ (افترض أن $r = 6371\ km$) .

الحل :

$$h = r(\csc\theta - 1)$$

$$\frac{dh}{d\theta} = r(-\csc\theta\cot\theta - 0)$$

$$\frac{dh}{d\theta} = -r\csc\theta\cot\theta$$

$$\frac{dh}{d\theta}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = -(6371)\csc\left(\frac{\pi}{6}\right)\cot\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= -6371(2)(\sqrt{3})$$

$$= -2\sqrt{3}(6371)$$

31) اذا كان $f(x) = 9ln\,x + \frac{1}{2x^2}$ فأثبت أن :

$$f'(x) = \frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$$

الحل :

$$f(x) = 9\ln x + \frac{1}{2x^2}$$

$$f'(x) = 9\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{-1(4x)}{(2x^2)^2}$$

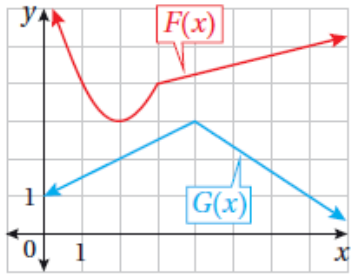
$$f'(x) = \frac{9}{x} + \frac{-4x}{4x^4}$$

$$f'(x) = \frac{9\times x^2}{x\times x^2} - \frac{1}{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{9x^2-1}{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$$

يُبيّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين $F(x)\ ,G(x)$



اذا كان $P(x) = F(x)G(x)$ ، وكان

$Q(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$: ، فأجد كلاً مما يأتي :

Mr. Haitham Harb
JoSchool-Online
0797771137

32) $P'(2)$

الحل :

$$p(x) = F(x)G(x)$$

$$p'(x) = F(x)G'(x) + G(x)F'(x)$$

$$p'(2) = F(2)G'(2) + G(2)F'(2)$$

من خلال الشكل :

$$F(2) = 3 \quad , \quad G(2) = 2 \quad , \quad F'(2) = 0$$

$G(x)$ اقتران متزايد عند الفترة التي تحتوي 2 :

$$G'(2) = M = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

نأخذ نقطتين $(0,1)$, $(2,2)$ تحقق G

$$G'(2) = \frac{2-1}{2-0} = \frac{1}{2}$$

$$p'(2) = 3\left(\frac{1}{2}\right) + 2(0) = \frac{3}{2}$$

33) $Q(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$, $Q'(7) = ??$

$$Q'(x) = \frac{G(x)F'(x) - F(x)G'(x)}{G^2(x)}$$

$$Q'(7) = \frac{G(7)F'(7) - F(7)G'(7)}{G^2(7)}$$

من خلال الشكل : $F(7) = 5$, $G(7) = 1$

النقاط $(3,4)$, $(7,5)$ ، $F'(7) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$F'(7) = \frac{5-4}{7-3} = \frac{1}{4}$$

النقاط $(4,3)$, $(7,1)$ ، $G'(7) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$G'(7) = \frac{3-1}{4-7} = \frac{-2}{3}$$

$$Q'(7) = \frac{(1)\left(\frac{1}{4}\right) - (5)\left(\frac{-2}{3}\right)}{(1)^2}$$

$$Q'(7) = \frac{1}{4} + \frac{10}{3} = \frac{43}{12}$$

مهارات التفكير العليا

تبرير: اذا كان $y = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

34) أجد ميل المماس عند نقطة الاصل

الحل :

ميل المماس عند $(0,0)$ ← $M = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(0,0)}$

$$y = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$y = \frac{1-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}} = \frac{\frac{e^x-1}{e^x}}{\frac{e^x+1}{e^x}}$$

$$y = \frac{e^x-1}{e^x+1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^x+1)e^x - (e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$$

T. Haitham Harb
JoSchool-Online
0797771137

$$M = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = \frac{2e^0}{(e^0+1)^2} = \frac{2}{(2)^2} = \frac{1}{2}$$

$M = \frac{1}{2}$ ← ميل المماس عند $(0,0)$

---

35) أبين عدم وجود مماس افقي للاقتران y ، مبرراً إجابتي .

الحل :

اذا وجد مماس افقي فإن ميله يساوي صفراً ، أي أن $\frac{2e^x}{(e^x+1)^2} = 0$ وهذا لا يتحقق الا اذا كان $e^x = 0$

ولكن $e^x > 0$ لجميع الاعداد الحقيقية x ، ولذا لا يوجد لهذا المنحنى مماسات افقية .

تحد : اذا كان $y = \frac{x+1}{x-1}$ ، حيث : $x \neq 1$ ،

فأجيب عن الأسئلة الثلاثة الاتية تباعاً :

36) أجد $\frac{dy}{dx}$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)(1)-(x+1)(1)}{(x-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

37) اعيد كتابة المعادلة بالنسبة للمتغير x (x اقتران بالنسبة الى y)، ثم أجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل :

$$\frac{y}{1} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$y(x-1) = x+1$$

$$yx - y = x + 1$$

$$+y \quad +y$$

$$yx = y + 1 + x$$

$$-x \quad -x$$

$$yx - x = y + 1$$

$$\frac{x(y-1)}{y-1} = \frac{y+1}{y-1} \rightarrow x = \frac{y+1}{y-1}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(y-1)(1)-(y+1)(1)}{(y-1)^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y-1-y-1}{(y-1)^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-2}{(y-1)^2}$$

38) أبين أن $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{(x-1)^2} \quad , \quad \frac{dx}{dy} = \frac{-2}{(y-1)^2}$$

لدينا معادلتين بدلالة متغيرين مختلفين لازم يكونو الجهتين بدلالة المتغير x

T. Haitham Harb
JoSchool-Online
0797771137

$\frac{dy}{dx}$ بدلالة x done

$y = \frac{x+1}{x-1}$ ، $\frac{dx}{dy} = \frac{-2}{(y-1)^2}$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-2}{\left(\frac{x+1}{x-1} - 1\right)^2}$$

$$= \frac{-2}{\left(\frac{x+1-(x-1)}{x-1}\right)^2}$$

$$= \frac{-2}{\left(\frac{x+1-x+1}{x-1}\right)^2} = \frac{-2}{\left(\frac{2}{x-1}\right)^2}$$

$$= \frac{-2}{\frac{4}{(x-1)^2}} = \frac{-2}{1} \times \frac{(x-1)^2}{4}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-(x-1)^2}{2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-(x-1)^2}{2} \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{-2}{(x-1)^2}}$$

$$\frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$ done

تبرير: اذا كان $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

39) أثبت أن $f''(x) = \frac{6\ln x - 5}{x^4}$ ، مبرراً إجابتي

الحل :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2)\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(2x)}{x^4}$$

$$= \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$

$$f''(x) = \frac{(x^3)\left(\frac{-2}{x}\right) - (1 - 2\ln x)(3x^2)}{x^6}$$

$$= \frac{-5x^2 + 6x^2 \ln x}{x^6}$$

$$= \frac{-5 + 6\ln x}{x^4}$$

40) أجد قيمة المقدار الاتي :

$$x^4 f''(x) + 4x^3 f'(x) + 2x^2 f(x) + 1$$

الحل :

$$= x^4\left(\frac{-5 + 6\ln x}{x^4}\right) + 4x^3\left(\frac{1 - 2\ln x}{x^3}\right) + 2x^2\left(\frac{\ln x}{x^2}\right) + 1$$

$$= -5 + 6\ln x + 4 - 8\ln x + 2\ln x + 1 = 0$$

Mr. Haitham Harb
JoSchool-Online
0797771137

قاعدة السلسلة

تعلَّمْتُ سابقًا إيجاد مشتقة الاقتران الناتج من تركيب اقتراني قوَّة، وذلك بإيجاد مشتقة الاقتران الخارجي وقيمته عند الاقتران الداخلي، ثم ضربه في مشتقة الاقتران الداخلي. تُعَدُّ هذه الطريقة إحدى أهم قواعد الاشتقاق، وتُسمّى قاعدة السلسلة فمثلاً ، يُمكِن إيجاد مشتقة الاقتران المُركَّب $h(x) = (5x^3 - 2x)^4$ الذي فيه $u = 5x^3 - 2x$ اقتران داخلي، و $y = u^4$ اقتران خارجي، على النحو الآتي :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= 4u^3(15x^2 - 2)$$

$$= 4(5x^3 - 2x)^3(15x^2 - 2)$$

بوجه عام، يُمكِن إيجاد مشتقة الاقتران الناتج من تركيب أيِّ اقترانين قابلين للاشتقاق كما يأتي :

نظرية — قاعدة السلسلة

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق، فإنَّه يُمكِن إيجاد مشتقة الاقتران المُركَّب: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ باستعمال القاعدة الآتية:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

وبصيغة أُخرى، إذا كان: $y = f(u)$، وكان: $u = g(x)$، فإنَّ:

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$، حيث تُحسَب قيمة $\frac{dy}{du}$ عندما $u = g(x)$.

وبكلمات أُخرى، مشتقة الاقتران المُركَّب $f(g(x))$ هي حاصل ضرب مشتقة الاقتران الخارجي f عند الاقتران الداخلي $g(x)$ في مشتقة الاقتران الداخلي $g(x)$

يُمكِن التوصُّل إلى النتائج الآتية عند تطبيق قاعدة السلسلة لإيجاد مشتقة اقترانات ناتجة من تركيب اقترانين ، أحدهما اقتران مثلثي، أو اقتران أُسّي طبيعي، أو اقتران لوغاريتمي طبيعي :

نتائج — قاعدة السلسلة والاقترانات المشهورة

إذا كان $g(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإنَّ:

$\frac{d}{dx}(\sin g(x)) = \cos(g(x)) \times g'(x)$

$\frac{d}{dx}(\csc g(x)) = -\csc(g(x)) \cot(g(x)) \times g'(x)$

$\frac{d}{dx}(\cos g(x)) = -\sin(g(x)) \times g'(x)$

$\frac{d}{dx}(\sec g(x)) = \sec(g(x)) \tan(g(x)) \times g'(x)$

$\frac{d}{dx}(\tan g(x)) = \sec^2(g(x)) \times g'(x)$

$\frac{d}{dx}(\cot g(x)) = -\csc^2(g(x)) \times g'(x)$

$\frac{d}{dx}(e^{g(x)}) = e^{g(x)} \times g'(x)$

$\frac{d}{dx}(\ln g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

مثال 1

ص. 40

1) $f(x) = \cos 2x$

الحل :

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\cos 2x)$$

$$f'(x) = -2 \sin 2x$$

قاعدة سلسلة القوَّة

يُعَدُّ الاقتران المُركَّب الذي يكون في صورة

$$f(x) = \big(g(x)\big)^n$$

أحد أكثر الاقترانات المُركَّبة شيوعًا ، وتُمثِّل مشتقته حالة خاصة من قاعدة السلسلة، وتُسمّى قاعدة سلسلة القوَّة ، حيث الاقتران الخارجي هو اقتران قوَّة .

مفهوم أساسي — قاعدة سلسلة القوّة

إذا كان n أيَّ عدد حقيقي، وكان: $u = g(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}\big(g(x)\big)^n = n\big(g(x)\big)^{n-1} \times g'(x)$$

وبصيغة أُخرى، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \times \frac{du}{dx}$$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

مثال 2

ص. 42

1) $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$

الحل :

$$f(x) = (x^2-1)^{2/3}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x^2-1)^{-1/3} \times \frac{d}{dx}(x^2-1)$$

$$= \frac{2}{3}(x^2-1)^{-1/3} \times 2x$$

$$f'(x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$$

2) $f(x) = tan^4 x$

2) $f(x) = e^{x+x^2}$

الحل :

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{x+x^2}\right)$$

$$f'(x) = e^{x+x^2} \times (1+2x)$$

---

3) $f(x) = \ln \sin x$

الحل :

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$f'(x) = \cot x$$

---

4) $f(x) = \tan 3x^2$

الحل :

$$f'(x) = sec^2(3x^2)(6x)$$

$$f'(x) = 6x \sec^2(3x^2)$$

---

5) $f(x) = e^{ln\, x}$

الحل :

$$f(x) = e^{ln\, x} = x$$

$$f'(x) = 1$$

---

6) $f(x) = ln(cot\, x)$

الحل :

$$f'(x) = \frac{-csc^2 x}{cot\, x}$$

Ham Harb
JoSchool-Online
0797771137

الحل :

$$f(x) = tan^4 x = (tan\ x)^4$$

$$f'(x) = 4(tan\ x)^3 \times \frac{d}{dx}(tan\ x)$$

$$f'(x) = 4tan^3 x \times sec^2 x$$

---

3) $f(x) = \sqrt{ln\ x}$

الحل :

$$f(x) = (ln\ x)^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(ln\ x)^{-1/2} \times \frac{d}{dx}(ln\ x)$$

$$= \frac{1}{2}(ln\ x)^{-1/2} \times \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{ln\ x}}$$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

اتحقق من فهمي

ص. 42

1) $f(x) = \sqrt[5]{(x^2-1)^2}$

الحل :

$$f(x) = (x^2-1)^{2/5}$$

$$f'(x) = \frac{2}{5}(x^2-1)^{-3/5} \times \frac{d}{dx}(x^2-1)$$

$$= \frac{2}{5}(x^2-1)^{-3/5} \times 2x$$

$$f'(x) = \frac{4x}{5\sqrt[5]{(x^2-1)^3}}$$

2) $f(x) = \sqrt{cos\ x}$

الحل :

$$f(x) = (cos\ x)^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(cos\ x)^{-1/2} \times \frac{d}{dx}(cos\ x)$$

$$= \frac{1}{2}(cos\ x)^{-1/2} \times -sin\ x$$

$$f'(x) = \frac{-sin\ x}{2\sqrt{cos\ x}}$$

---

3) $f(x) = (ln\ x)^5$

الحل :

$$f'(x) = 5(ln\ x)^4 \times \frac{d}{dx}(ln\ x)$$

$$f'(x) = 5\ ln^4 x \times \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{5\ ln^4 x}{x}$$

الاستعمال المُتكرِّر لقاعدة السلسلة

T. Haitham Harb
eSchool-Online
0797771137

أحتاج أحيانًا إلى استعمال قاعدة السلسلة أكثر من مَرَّة لإيجاد المشتقة. فمثلً، إذا كان

$$y = f(u)$$

$$u = g(x)$$

$$x = h(t)$$

حيث f , g , h اقترانات ، كلٌّ منها قابل للاشتقاق في مجاله، فإنَّه يُمكِن إيجاد مشتقة y بالنسبة إلى t باستعمال قاعدة السلسلة مَرَّتين كالآتي :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dt}$$

$$= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \times \frac{dx}{dt}$$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

مثال 3

ص. 43

$$1)\ f(x) = e^{\csc 4x}$$

الحل :

$$f'(x) = e^{\csc 4x} \times \frac{d}{dx}(\csc 4x)$$

$$= e^{\csc 4x} \times -\csc 4x \times \cot 4x \times \frac{d}{dx}(4x)$$

$$= -4e^{\csc 4x} \csc 4x \cot 4x$$

$$2)\ f(x) = \sin\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right)$$

الحل :

$$f'(x) = \cos\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right) \times \frac{d}{dx}\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right)$$

$$= \cos\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right) \times \sec^2\sqrt{3x^2+4} \times \frac{d}{dx}\left(\sqrt{3x^2+4}\right)$$

$$= \cos\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right) \times \sec^2\sqrt{3x^2+4} \times \frac{d}{dx}(3x^2+4)^{1/2}$$

$$= \cos\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right) \times \sec^2\sqrt{3x^2+4} \times \frac{1}{2}(3x^2+4)^{-1/2} \times \frac{d}{dx}(3x^2+4)$$

$$= \cos\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right) \times \sec^2\sqrt{3x^2+4} \times \frac{1}{2}(3x^2+4)^{-1/2} \times 6x$$

$$= \frac{3x\cos\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right) \times \sec^2\sqrt{3x^2+4}}{\sqrt{3x^2+4}}$$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

اتحقق من فهمي

ص. 44

$$1)\ f(x) = \cos^2(7x^3+6x-1)$$

الحل :

$$f(x) = \left(\cos(7x^3+6x-1)\right)^2$$

$$f'(x) = 2\left(\cos(7x^3+6x-1)\right)^1(-\sin(7x^3+6x-1)(21x^2+6)$$

$$= -2(21x^2+6)\sin(7x^3+6x-1)\cos(7x^3+6x-1)$$

$$= -(21x^2+6)\sin 2(7x^3+6x-1)$$

Haitham Harb
JoSchool-Online
0797771137

$$2)\ f(x) = (1 + (x^2+1)^4)^3$$

الحل :

$$f'(x) = 3(2 + (x^2+1)^4)^2 \left(4(x^2+1)(2)\right)$$

$$= 24x(x^2+1)^3\ (2 + (x^2+1)^4)^2$$

قواعد الاشتقاق الأساسية ، وقاعدة السلسلة

لإيجاد مشتقة اقتران في بعض الحالات ، أحتاج إلى

تطبيق قواعد الاشتقاق الأساسية، مثل :

مشتقة المجموع ، ومشتقة الفرق ، ومشتقة الضرب ،

ومشتقة القسمة ، ومضاعفات الاقتران ، إضافةً إلى

تطبيق قاعدة السلسلة .

أ - جد ميل المماس لمنحنى الاقتران

مثال 4 ص. 44

$$f(x) = e^{-0.2x} \cdot \sin 4x$$

عندما $x = \frac{\pi}{8}$

ب - جد معادلة العمودي على المماس

لمنحنى الاقتران $f(x) = \left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)^2$

عندما $x = 0$

الحل :

أ –

$$f'(x) = e^{-0.2x} \cdot \cos 4x(4) + \sin 4x\left(e^{-0.2x} \cdot (-0.2)\right)$$

$$f'(x) = 4e^{-0.2x}\cos 4x - 0.2e^{-0.2x}\sin 4x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 4e^{-0.2\left(\frac{\pi}{8}\right)}\cos 4\frac{\pi}{8} - 0.2e^{-0.2\left(\frac{\pi}{8}\right)}\sin 4\frac{\pi}{8}$$

$$\therefore\ f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = -0.2\ e^{-0.025\pi}$$

ب –

$$f'(x) = 2\left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)\left(\frac{(x^2+3)(3) - (3x-1)(2x)}{(x^2+3)^2}\right)$$

$$f'(0) = 2\left(\frac{3(0)-1}{0+3}\right)\left(\frac{(0+3)(3) - (0-1)(0)}{(0+3)^2}\right)$$

$$f'(0) = \frac{-2}{3}$$

أ - جد ميل المماس لمنحنى الاقتران

$f(x) = (2x+1)^5(x^3 - x + 1)^4$ اتحقق من فهمي

عندما $x = 1$ ص. 45

ب - جد معادلة العمودي على المماس

لمنحنى الاقتران $f(x) = \frac{\cos^2 x}{e^{2x}}$

عندما $x = \frac{\pi}{2}$

الحل :

أ –

$$f'(x) = (2x+1)^5(4)(x^3 - x + 1)^3(3x^2 - 1)$$
$$+ (x^3 - x + 1)^4(5)(2x+1)^4(2)$$

$$f'(1) = (3)^5(4)(1)^3(2) + (1)^4(5)(3)^4(2)$$

$$\therefore\ f'(1) = 2754$$

Ms. Haitham Harb
JoSchool-Online
0797771137

ب –

$$f'(x) = \frac{e^{2x} \times 2(\cos x)^1(-\sin x) - (\cos x)^2 \times 2e^{2x}}{e^{4x}}$$

$$f'(x) = \frac{-\sin 2x - 2(\cos x)^2}{e^{2x}}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\sin \pi - 2\left(\cos \frac{\pi}{2}\right)^2}{e^{\pi}}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

مثال 5
ص. 45

أعمال : طرحت إحدى الشركات مُنتَجًا جديدًا في الأسواق، ثم رصدت عدد القطع المَبيعة منذ طرحه . إذا مثَّل الاقتران :

$$N(t) = \frac{250000\,t^2}{(2t+1)^2} \quad , \quad t > 0$$

عدد القطع المَبيعة منذ طرحه، حيث t الزمن بالأسابيع، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا

a) جد معدل تغير عدد القطع المبيعة بالنسبة إلى الزمن

الحل : أجد $N'(t)$

$$N(t) = \frac{250000t^2}{(2t+1)^2}$$

$$N'(t) = \frac{(2t\ +\ 1)^2(250,000(2t)) - (250,000\,t^2)(2(2t+1)^1(2))}{((2t+1)^2)^2}$$

$$= \frac{(2t+1)^2(500,000\,t) - (250000t^2)2(2t+1)(2)}{(2t+1)^4}$$

$$= \frac{(2t+1)^2(500,000\,t) - (1000000t^2)(2t+1)}{(2t+1)^4}$$

$$= \frac{(2t+1)(500,000\,t)\big((2t+1) - 2t\big)}{(2t+1)^4}$$

$$= \frac{500,000\,(2t^2 + t - 2t^2)}{(2t+1)^3}$$

$$N'(t) = \frac{500000\,t}{(2t+1)^3}$$

b) جد $N'(52)$ مفسراً معنى الاجابة :

الحل : أجد $N'(52)$

$$N'(t) = \frac{500000\,t}{(2t+1)^3}$$

$$N'(52) = \frac{500000(52)}{(2(52)+1)^3}$$

$$\approx 22$$

$$N'(52) \approx 22 \quad , \quad N' > 0$$

إذن ، $N'(52) \approx 22$ وهذا يعني أنَّ إجمالي عدد القطع المَبيعة من المُنتَج يزداد بمُعدَّل 22 قطعة لكل أسبوع بعد مرور 52 أسبوعًا على طرح المُنتَج في الأسواق .

Haitham Harb
JoSchool-Online
0797771137

اتحقق من فهمي ص. 47

تحسب قيمة بدل الخدمة لأحد المنتجات تُحسب بالدينار باستعمال الاقتران :

$$U(x) = 80\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}$$

حيث x عدد القطع المبيعة من المنتج :

a) جد معدل تغير قيمة بدل الخدمة بالنسبة إلى عدد القطع المبيعة من المنتج .

الحل :

$$U(x) = 80\left(\frac{2x+1}{3x+4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$U'(x) = 80\frac{1}{2}\left(\frac{2x+1}{3x+4}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{(3x+4)(2)-(2x+1)(3)}{(3x+4)^2}\right)$$

$$= 40\left(\frac{2x+1}{3x+4}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{6x+8-6x-3}{(3x+4)^2}\right)$$

$$U'(x) = \frac{200}{(3x+4)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}} = \frac{200}{(3x+4)^2\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}}$$

b) جد $u'(20)$ مفسراً معنى الناتج :

الحل :

$$u'(20) = \frac{200}{(3(20)+4)^2\sqrt{\frac{2(20)+1}{3(20)+4}}} = \frac{200}{(64)^2\sqrt{\frac{41}{64}}}$$

$u'(20) > 0$

هذا يعني أنه بعد بيع 20 قطعة من المنتج فإن معدل قيمة بدل الخدمة يزداد بالنسبة إلى عدد القطع بمعدل $\frac{200}{(64)^2\sqrt{\frac{41}{64}}}$ لكل قطعة .

مشتقة $a^{(g(x))}$

تعلَّمْتُ سابقًا كيف أجد مشتقة الاقتران الأُسِّي الطبيعي $f(x) = e^x$. ولكنْ ، كيف يُمكِنني إيجاد مشتقة الاقتران : $f(x) = a^x$ حيث a عدد حقيقي موجب ؟

يُمكِن استعمال خصائص اللوغاريتمات لكتابة a^x بدلالة e^x ، حيث a عدد حقيقي موجب ، و $a \neq 1$ ، كما يأتي :

$$a^x = e^{\ln a^x}$$

$$a^x = e^{x \ln a}$$

يُمكِن إيجاد مشتقة a^x باستعمال قاعدة السلسلة كما يأتي :

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{x \ln a})$$

$$= e^{x \ln a} \times \ln a$$

$$= a^x \times \ln a$$

اذن : $\boxed{\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \times \ln a}$

بناءً على ما سبق، يُمكِن إيجاد مشتقة $a^{g(x)}$ حيث $g(x)$ اقتران قابل للاشتقاق عند x ، كما يأتي :

T Haitham Mark
JoSchool-Online
0797771137

نظرية — مشتقة $a^{g(x)}$

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، و $a \neq 1$، وكان $g(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \times \ln a \qquad \frac{d}{dx}(a^{g(x)}) = \ln a \times a^{g(x)} \times g'(x)$$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

مثال 6

ص. 47

$a)\ f(x) = 8^{5x}$

$f'(x) = 8^{5x}\ (5)\ (\ln 8)$

$f'(x) = (5\ ln\ 8)8^{5x}$

$b)\ f(x) = 6^{x^2}$

$f'(x) = 6^{x^2}(2x)(\ln 6)$

$f'(x) = (2x\ ln\ 6)6^{x^2}$

$c)\ f(x) = e^{3x} + 2^{3x}$

$f'(x) = 3e^{3x} + 2^{3x}(3)(\ln 2)$

$= 3e^{3x} + (3\ ln\ 2)2^{3x}$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

اتحقق من فهمي

ص. 48

$a)\ f(x) = \pi^{\pi x}$

$f'(x) = \pi^{\pi x} \ln \pi$

$b)\ f(x) = 6^{1-x^3}$

$f'(x) = 6^{1-x^3}(-3x^2)(\ln 6)$

$f'(x) = (-3x^2\ ln\ 6)6^{1-x^3}$

$c)\ f(x) = e^{4x} + 4^{2x}$

$f'(x) = 4e^{4x} + 4^{2x}(2)(\ln 4)$

$= 4e^{4x} + (2\ ln\ 4)\ 4^{2x}$

مشتقة $\log_a g(x)$

لإيجاد مشتقة $log_a x$ ، حيث a عدد حقيقي موجب ، و $a \neq 1$ ، أستعمل صيغة تغيير الأساس في اللوغاريتمات لكتابة $log_a x$ بدلالة اللوغاريتم الطبيعي، ثم أجد المشتقة كما يأتي :

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)$$

$$= \frac{1}{\ln a} \times \frac{d}{dx}(ln\ x)$$

$$= \frac{1}{\ln a} \times \left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x \ln a}$$

اذن :

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(log_a x\right) = \frac{1}{x ln\ a}}$$

بناءً على ما سبق، يُمكِن إيجاد مشتقة $log_a g(x)$ حيث $g(x)$ اقتران قابل للاشتقاق ، كما يأتي :

نظرية — مشتقة $\log_a g(x)$

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، و $a \neq 1$، وكان $g(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} \qquad \frac{d}{dx}(\log_a g(x)) = \frac{g'(x)}{(\ln a) g(x)}$$

Mr. Haitham Harb JoSchool-Online 0797771137

مثال 7
ص. 49

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

1) $f(x) = \log(\cos x)$

$$f'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x \ln 10}$$

$$= \frac{-\tan x}{\ln 10}$$

2) $f(x) = \log_2\left(\frac{x^2}{x-1}\right)$

$$f'(x) = \frac{2x}{(ln\ 2)\ x^2} - \frac{1}{(ln\ 2)(x-1)}$$

$$= \frac{2}{(ln\ 2)\ x} - \frac{1}{(ln\ 2)(x-1)}$$

اتحقق من فهمي
ص. 49

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

a) $f(x) = log(\sec x)$

$$f'(x) = \frac{\sec x \tan x}{\sec x \ln 10}$$

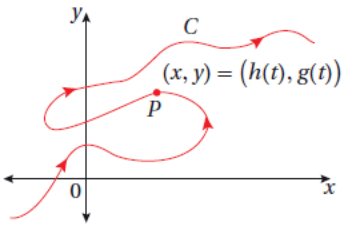
$$= \frac{\tan x}{\ln 10}$$

b) $f(x) = \log_8(x^2 + 3x)$

$$f'(x) = \frac{2x+3}{(x^2+3x)\ln 8}$$

مشتقة المعادلات الوسيطية

يُبيّن الشكل المجاور الجُسَيْم P الذي يتحرّك على المنحنى C لحظة مروره بالنقطة (x, y)



أُلاحِظ أنَّ المنحنى C لا يُحقِّق اختبار الخط الرأسي ؛ لذا لا يُمكِن إيجاد علاقة واحدة فقط في صورة $y = f(x)$ تربط جميع قِيَم x بقِيَم y المُناظِرة لها على المنحنى. ولكنْ، يُمكِن كتابة كلٍّ من الإحداثي x والإحداثي y في صورة اقتران بالنسبة إلى الزمن t كما يأتي :

$$x = h(t) \quad , \quad y = g(t)$$

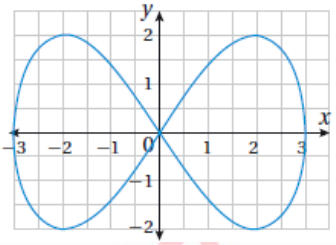
يُشكِّل هذان الاقترانان معًا معادلة وسيطية للمنحنى C ويُسمّى t المُتغيِّر الوسيط ؛ لأنَّ كل قيمة له تُحدِّد قيمةً للمُتغيِّر x ، وقيمةً أُخرى للمُتغيِّر y وعند تمثيل الأزواج المُرتَّبة (x, y) في المستوى الإحداثي، يَنتج المنحنى C

Mr. Haitham Harb
loschool-Online
0797711371

يُمكِن تحديد قِيَم المُتغيِّر t عن طريق فترة تُسمّى مجال الوسيط) ؛ لأنَّ النقاط على المنحنى قد تتكرَّر بعد هذه الفترة .

$$\underbrace{x = h(t)\ ,\ y = g(t)}_{\text{معادلة وسطية}} \quad \underbrace{t_0 \le t \le t_1}_{\text{مجال الوسيط}}$$

يُبيِّن الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطية :



$$x = 3\cos t\ ,\ y = 2\sin 2t\ , 0 \le t \le 2\pi$$

يُمكِن إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لهذه المعادلة الوسيطية بإيجاد مشتقة كل من x و y بالنسبة إلى الوسيط t أوَّلاً، ثم استعمال قاعدة السلسلة على النحو الآتي :

$$\frac{dx}{dt} = -3\sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = 4\cos 2t$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4\cos 2t}{-3\sin t}$$

بناءً على ما سبق، يُمكِن إيجاد مشتقة أيِّ معادلة وسيطية كما يأتي :

مفهوم أساسي — مشتقة المعادلة الوسيطية

إذا كان h و g اقترانين قابلين للاشتقاق عند t، وكان $x = h(t)$، و $y = g(t)$، فإنَّ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\ ,\ \frac{dx}{dt} \neq 0$$

جد معادلة المماس لمنحنى المعادلة الوسيطية الآتية عندما $t = \frac{\pi}{4}$

مثال 8

ص. 52

$$x = 2\sin t\ ,\ y = 3\cos t\ ,\ 0 \le t \le 2\pi$$

الحل :

الخطوة 1 : أجد ميل المماس عندما $t = \frac{\pi}{4}$

$$x = 2\sin t \rightarrow \frac{dx}{dt} = 2\cos t$$

$$y = 3\cos t \rightarrow \frac{dy}{dt} = -3\sin t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3\sin t}{2\cos t} = \frac{-3}{2}\tan t$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$m = \frac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{-3}{2}\tan\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{-3}{2}$$

الخطوة 2 : أجد x , y عندما $t = \frac{\pi}{4}$

$$x = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$y = 3\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

الخطوة 3 : أجد معادلة المماس .

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{-3}{2}(x - \frac{2}{\sqrt{2}})$$

$$y - \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{-3}{2}x + \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$+\frac{3}{\sqrt{2}} \qquad -\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{-3}{2}x + \frac{6}{\sqrt{2}}$$

$$2y + 3x = 6\sqrt{2}$$

جد معادلة المماس لمنحنى المعادلة الوسيطية الآتية عندما $t = \frac{\pi}{4}$

اتحقق من فهمي ص. 52

$$x = \sec t \ , \ y = \tan(t) \ , \ \frac{-\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$$

الحل :

الخطوة 1 : أجد ميل المماس عندما $t = \frac{\pi}{4}$

$$y = \tan t \rightarrow \frac{dy}{dt} = \sec^2 t$$

$$x = \sec t \rightarrow \frac{dx}{dt} = \sec t \cdot \tan t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 t}{\sec t \cdot \tan t} = \frac{\sec t}{\tan t}$$

$$y - y_1 = M_1(x - x_1)$$

$$M_1 = \frac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} \quad \frac{\sec\frac{\pi}{4}}{\tan\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

الخطوة 2 : أجد x , y عندما $t = \frac{\pi}{4}$

$$x = \sec\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

$$y = tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

الخطوة 3 : أجد معادلة المماس .

$$y - 1 = \sqrt{2}(x - \sqrt{2})$$

$$y - 1 = \sqrt{2}\,x - 2$$

$$+1 \qquad +1$$

$$y = \sqrt{2}\,x - 1$$

T. Haitham Harb
JoSchool-Online
0797771137

أتدرّب وأحُلّ المسائل

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي :

1) $f(x) = e^{4x+2}$

الحل :

$f'(x) = 4\,e^{4x+2}$

---

2) $f(x) = 50e^{2x-10}$

الحل :

$f'(x) = (5)(2)\,e^{2x-10}$

$f'(x) = 10\,e^{2x-10}$

---

3) $f(x) = cos(x^2 - 3x - 4)$

الحل :

$f'(x) = -(2x-3)\left(sin(x^2-3x-4)\right)$

$f'(x) = (3-2x)\,sin(x^2-3x-4)$

---

4) $f(x) = 10x^2e^{-x^2}$

الحل :

$f'(x) = (10x^2)(-2xe^{-x^2}) + (e^{-x^2})(20x)$

$f'(x) = 20xe^{-x^2}(1-x^2)$

---

5) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$

الحل :

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{2x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

---

6) $f(x) = x^2 tan\left(\dfrac{1}{x}\right)$

الحل :

$f'(x) = (x^2)\left(-\frac{1}{x^2}sec^2\frac{1}{x}\right) + \left(tan\frac{1}{x}\right)(2x)$

$f'(x) = -sec^2\frac{1}{x} + 2xtan\left(\frac{1}{x}\right)$

---

7) $f(x) = 3x - 5cos(\pi x)^2$

الحل :

$f'(x) = 3 + 5(2)(\pi x)(\pi)sin(\pi x)^2$

$f'(x) = 3 + 10\pi^2 xcos(\pi x)^2$

---

8) $f(x) = ln\left(\dfrac{1+e^x}{1-e^x}\right)$

الحل :

$f(x) = ln\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right)$

$= ln(1+e^x) - ln(1-e^x)$

$f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{e^x}{1-e^x}$

$f'(x) = \frac{2e^x}{1-e^{2x}}$

T. Haitham Harb
JoSchool-Online
0797771137

9) $f(x) = (\ln x)^4$

الحل :

$$f'(x) = \frac{4}{x}(\ln x)^3$$

---

10) $f(x) = \sin\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\sin x}\right)$

الحل :

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\cos\sqrt[3]{x} + \frac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}$$

---

11) $f(x) = \sqrt[5]{x^2 + 8x}$

الحل :

$$f(x) = \sqrt[5]{x^2 + 8x} = (x^2 + 8x)^{\frac{1}{5}}$$

$$f'(x) = \frac{2x + 8}{5\sqrt[5]{(x^2 + 8x)^4}}$$

---

12) $f(x) = \dfrac{3^{2x}}{x}$

الحل :

$$f'(x) = \frac{(x)(2\ln 3)\,3^{2x} - 3^{2x}}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{(-1 + 2x\ln 3)\,3^{2x}}{x^2}$$

13) $f(x) = 2^{-x}\cos(\pi x)$

الحل :

$$f'(x) = 2^{-x}\big(-\pi\sin(\pi x)\big) + \big(\cos(\pi x)\big)(-\ln 2)\,2^{-x}$$

$$f'(x) = -\pi 2^{-x}\sin(\pi x) - 2^{-x}(\cos \pi x)\ln 2$$

---

14) $f(x) = \dfrac{10\log_4 x}{x}$

الحل :

$$f'(x) = \frac{\frac{10x}{x\ln 4} - 10\log_4 x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{10}{\ln 4} - 10\log_4 x}{x^2}$$

---

15) $f(x) = \left(\dfrac{\sin x}{1 + \cos x}\right)^2$

الحل :

$$f'(x) = 2\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^1\left(\frac{(1+\cos x)\cos x - \sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}\right)$$

$$f'(x) = \frac{2\sin x}{1+\cos x}\cdot\left(\frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2}\right)$$

$$f'(x) = \frac{2\sin x}{1+\cos x}\cdot\frac{\cos x + 1}{(1+\cos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

---

16) $f(x) = \log_3(1 + x\ln x)$

الحل :

$$f'(x) = \frac{(x)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1)}{(\ln 3)(1 + x\ln x)} = \frac{1 + \ln x}{(\ln 3)(1 + x\ln x)}$$

T. Haitham Harb
JoSchool OnLine
0797771137

$17)\ f(x) = e^{\sin 2x} + \sin(e^{2x})$

الحل :

$f'(x) = 2e^{\sin 2x}\cos 2x + 2e^{2x}\cos(e^{2x})$

$18)\ f(x) = \tan^4(\sec(\cos x))$

الحل :

$f'(x) = 4\left(\tan(\sec(\cos x))\right)^3 \sec^2(\sec(\cos x))$

$\times \sec(\cos x)\tan(\cos x) \times (-\sin x)$

$f'(x) = -4\tan^3(\sec(\cos x))\sec^2(\sec(\cos x))$

$\times \sec(\cos x)\tan(\cos x) \times \sin x$

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة

$19)\ f(x) = 4e^{-0.5x^2}\ ,\ x = -2$

$f'(x) = -4e^{-0.5x^2}(-0.5(2x))$

$f'(x) = 4xe^{-0.5x^2}$

$M_1 = f'(-2) = 4(-2)e^{-0.5(-2)^2} = 8e^{-2}$

$y - y_1 = M_1(x - x_1)\ :\ x_1 = -2$

$f(-2) = y_1 = 4e^{-2}$

$y - \frac{4}{e^2} = \frac{8}{e^2}(x + 2)$

معادلة المماس :

$y = \frac{8}{e^2}(x + 2) + \frac{4}{e^2}$

معادلة العمودي $y - y_1 = M_2(x - x_1)$

$M_1 \times M_2 = -1\ ,\ M_2 = \frac{-e^2}{8}$

$y - \frac{4}{e^2} = \frac{-e^2}{8}(x + 2)$

$y = \frac{-e^2}{8}(x + 2) + \frac{4}{e^2}$

$20)\ f(x) = x + \cos 2x\ ,\ x = 0$

$f'(x) = 1 - 2\sin 2x$

$m = f'(0) = 1 - 2\sin\left(2(0)\right) = 8e^{-2}$

$= 1 - 2(0) = 1$

$y - y_1 = m(x - x_1)\ :\ x_1 = 0$

$f(0) = 0 + 1 = 1$

$y - 1 = 1(x - 0)$

معادلة المماس :

$y = x + 1$

معادلة العمودي $y - y_1 = m_1(x - x_1)$

$m \times m_1 = -1\ ,\ m_1 = -1$

$y - 1 = -1(x + 0)$

$y = -x + 1$

Haitham Harb
JoSchool-Online
0797771137

21) $f(x) = 2^x \, , x = 0$

$f'(x) = 2^x \ln 2$

$M_1 = f'(0) = 2^0 \ln 2$

$\rightarrow M_1 = \ln 2$

معادلة المماس :

$y - y_1 = M_1(x - x_1)$: $x = 0$

$y - y_1 = \ln 2\,(x - 0)$: $y_1 = f(0) = 2^0 = 1$

$y - 1 = x \ln 2$

$y = x \ln 2 + 1$

معادلة العمودي :

$M_1 \times M_2 = -1$

$M_2 = \dfrac{-1}{\ln 2}$

$y - y_1 = M_2(x - x_1)$

$y - 1 = \dfrac{-1}{\ln 2}(x - 0)$

$y = \dfrac{-x}{\ln 2} + 1$

---

22) $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot \sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$, $x = 3$

$f(x) = (x+1)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$

$f'(x) = (x+1)^{\frac{1}{2}}\left(\cos\dfrac{\pi x}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right) + \sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) \cdot \dfrac{1}{2}(x+1)^{\frac{-1}{2}}(1)$

$f'(x) = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{x+1}\cos\dfrac{\pi x}{2} + \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}{2\sqrt{x+1}}$

$M_1 = f'(3) = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{4}\cos\dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{\sin\dfrac{3\pi}{2}}{2\sqrt{4}}$

$M_1 = \dfrac{-1}{4}$

معادلة المماس :

$y - y_1 = M_1(x - x_1)$ $x_1 = 3$

$y + 2 = \dfrac{-1}{4}(x - 3)$ $y_1 = f(3) = -2$

$y + 2 = \dfrac{-1}{4}x + \dfrac{3}{4}$

$-2 \qquad -2$

$y = \dfrac{-1}{4}x - \dfrac{5}{4}$

معادلة العمودي :

$M_1 \times M_2 = -1$

$\dfrac{-1}{4} \times M_2 = -1 \rightarrow M_2 = 4$

$y + 2 = 4(x - 3)$

$y + 2 = 4x - 12$

$-2 \qquad -2$

$y = 4x - 14$

---

23) إذا كان $A(x) = f(g(x))$ ، وكان :

$f(-2) = 8$, $f'(-2) = 4$, $f'(5) = 3$

$g(5) = -2$, $g'(5) = 6$

فأجد $A'(5)$

الحل :

$A'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$

$A'(5) = f'(g(5)) \times g'(5)$

$= f'(-2) \times 6$

$= 4 \times 6$

$= 24$

T. Haitham Harb
JoSchool-Online
0797771137

24) إذا كان $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ، فأثبت أن

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

الحل :

$$f'(x)=\frac{(\sqrt{x^2+1})(1)-(x)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^2+1}$$

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^2+1}$$

$$f'(x)=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

يمثل الاقتران $A(t)=Ne^{0.1t}$ عدد خلايا البكتيريا بعد t ساعة في مجتمع بكتيري

25) جد معدل نمو المجتمع بعد 3 ساعات بدلالة الثابت N

الحل :

$$A'(t)=N(e^{a.1t})(0.1)$$

$$A'(3)=N(e^{0.1(3)})(0.1)=Ne^{0.3}(0.1)$$

26) إذا كان معدل نمو المجتمع بعد k ساعة هو 0.2 خلية لكل ساعة ، فما قيمة k بدلالة N

الحل :

$$A'(t)=0.1Ne^{0.1t} \quad ,t=k$$

$$A'(k)=\frac{0.1Ne^{0.1k}}{0.1N}=\frac{0.2}{0.1N}$$

$$e^{0.1k}=\frac{2}{N}$$

$$\text{Ln } e^{0.1k}=\text{Ln}\left(\frac{2}{N}\right)$$

$$\frac{0.1k}{0.1}=\frac{\text{Ln }\frac{2}{N}}{0.1}$$

$$k=\frac{\text{Ln }\frac{2}{N}}{0.1}$$

أجد المشتقة العليا المطلوبة في كلٍّ ممّا يأتي

27) $f(x)=\sin \pi x$ ، $f'''(x)$ ؟

$$f'(x)=\cos \pi x(\pi)=\pi \cos \pi x$$

$$f''(x)=\pi(-\sin \pi x)(\pi)$$

$$f''(x)=-\pi^2 \sin \pi x$$

$$f'''(x)=-\pi^2(\cos \pi x)(\pi)$$

$$f'''(x)=-\pi^3 \cos \pi x$$

---

28) $f(x)=\cos(2x+1)$ ، $f^{(5)}(x)$ ؟

$$f'(x)=-2sin(2x+1)$$

$$f''(x)=-4(\cos(2x+1))$$

$$f'''(x)=8sin(2x+1)$$

$$f^{(4)}(x)=16\cos(2x+1)$$

$$f^{(5)}(x)=-32\sin(2x+1)$$

T. Haitham Harb
JoSchool-Online
0797771137

29) $f(x) = \cos x^2$, $f'''(x) = ??$

$f'(x) = -\sin x^2(2x) = -2x \sin x^2$

$f''(x) = -2x(\cos x^2(2x)) + \sin x^2(-2)$

$f''(x) = -4x^2 \cos x^2 - 2 \sin x^2$

$f'''(x) = -4x^2(-\sin x^2(2x)) + \cos x^2(-8x) - 2\cos(x^2)(2x)$

$f'''(x) = 8x^3 \sin x^2 - 8x \cos x^2 - 4x \cos x^2$

---

30) اذا كان الاقتران $y = e^{\sin x}$ ، فأجد ميل مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(0, 1)$

الحل :

$y' = (\cos x)e^{\sin x}$

$m = f'(0) = (\cos 0)e^{\sin 0} = 1$

$\rightarrow m = 1$

---

31) يمكن نمذجة الكمية A (بالغرام) المتبقية عن عينة كتلتها الابتدائية $20g$ من عنصر البلوتونيوم بعد t يوماً باستعمال الاقتران $A(t) = 20\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{140}}$

أجد معدل تحلل عنصر البلوتونيوم عندما $(t = 2)$

الحل :

$A(t) = 20\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{140}}$

$A'(t) = \frac{20}{140}\left(\ln\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{140}}$

$A'(2) = \frac{20}{140}\left(\ln\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{140}} \approx -0.098$

تتحرك كرة معلقة بزنبرك إلى أعلى وأسفل ويحدد الاقتران $s(t) = 0.1\ sin(2.4t)$ موقع الكرة عند أي موقع لاحق ، حيث t الزمن بالثواني و s الموقع بالسنتيمترات.

32) جد سرعة الكرة عندما $t = 1$

الحل :

$S(t) = 0.1\ sin(2.4\ t)$

$V(t) = 2.4(0.1\ cos(2.4\ t))$

$= 0.24\ cos(2.4\ t)$

$V(1) = 0.24\ cos(2.4)$

$\approx -0.177\ cm/s$

33) جد موقع الكرة عندما تكون سرعتها صفراً

الحل :

$V(t) = 0$

$0.24\ cos(2.4\ t) = 0$

$cos(2.4\ t) = 0$

$|sin\ (2.4\ t)| = 1$

$sin\ (2.4\ t) = 1\ or\ -1$

لكن موقع الكرة هو

$S(t) = 0.1\ sin(2.4\ t)$

بتعويض قيمة $sin(2.4\ t)$ نجد ان الموقع هو:

$s = 0.1(1) = 0.1$

$or\ s = 0.1(-1) = -0.1$

اذن عندما تكون سرعة الكرة صفراً يكون موقعها عند $0.1\ cm$ أو $-0.1\ cm$

Haitham Harb JoSchool-Online 0797771137

34) جد موقع الكرة عندما يكون تسارعها صفراً

الحل :

$$a(t) = -0.24 \times 2.4 \sin 2.4t$$
$$= -0.576 \sin 2.4t$$
$$a(t) = 0$$
$$-0.576 \sin 2.4t = 0$$
$$\sin(2.4\,t) = 0$$
$$S(t) = 0.1 \sin(2.4\,t)$$

بتعويض قيمة $\sin(2.4\,t)$ نجد ان الموقع هو:

$$s = 0.1(0) = 0$$

اذن عندما يكون تسارع الكرة صفراً يكون موقعها عند $s = 0$ أي عند مرورها بموقع الاتزان .

أجد معادلة المماس لمنحنى كل معادلة وسيطية ممّا يأتي عند النقطة المُحدَّدة بقيمة t المعطاة .

35) $x = t + 2$, $y = t^2 - 1$, $t = 1$

اولا : نجد $\frac{dy}{dx}$ لنجد الميل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad : \quad \frac{dx}{dt} = 1 \quad , \quad \frac{dy}{dt} = 2t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2t}{1} = 2t$$

$$M_1 = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=1} = 2(1) = 2$$

ثانياً : نجد معادلة المماس

$$y - y_1 = M_1(x - x_1)$$

$$x = 1 + 2 = 3 \quad , \quad y = (1)^2 - 1 = 0$$

$$y - 0 = 2(x \pm 3)$$

$$y = 2x - 6$$

36) $x = \frac{t}{2}$, $y = t^2 - 4$, $t = -1$

اولا : نجد $\frac{dy}{dx}$ لنجد الميل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad : \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{dy}{dt} = 2t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2t}{\frac{1}{2}} = 4t$$

$$M_1 = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=-1} = 4(-1) = -4$$

ثانياً : نجد معادلة المماس

$$y - y_1 = M_1(x - x_1)$$

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{-1}{2}, (-1)^2 - 4\right) = \left(-\frac{1}{2}, -3\right)$$

$$y + 3 = -4\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$y + 3 = -4x - 2$$
$$-3 \qquad -3$$
$$y = -4x - 5$$

---

37) $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t = \frac{\pi}{3}$

اولا : نجد $\frac{dy}{dx}$ لنجد الميل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad : \quad \frac{dx}{dt} = 1 - \cos t \quad , \quad \frac{dy}{dt} = \sin t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = 4t$$

$$\mathrm{m} = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{3}} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{1 - \cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Haitham Harb JoSchool-Online 0797771137

$$x = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = 1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ثانياً : نجد معادلة المماس

$$y - y_1 = M_1(x - x_1)$$

$$y - \frac{1}{2} = \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$y = \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}\pi}{3} + 2$$

---

38) $x = \sec^2 t - 1$, $y = \tan t$, $t = \frac{-\pi}{4}$

اولا : نجد $\frac{dy}{dx}$ لنجد الميل

$$y = \tan t \ , \ \frac{dy}{dx} = sec^2 t$$

$$x = \sec^2 t - 1$$

$$\frac{dx}{dt} = 2 \sec t \ (\sec t \tan t) = 2 \sec^2 t \ . \tan t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sec^2 t}{2 \sec^2 t \tan t} = \frac{\cot(t)}{2}$$

ثانياً : نجد معادلة المماس

$$y - y_1 = M_1(x - x_1)$$

$$m = \frac{dy}{dx}\Big|_{\frac{-\pi}{4}} = \frac{\cot(\frac{-\pi}{4})}{2} = \frac{-1}{2}$$

$$(x_1, y_1) = \left(\sec^2\left(\frac{-\pi}{4}\right) - 1 \ , \tan\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right) = (1, -1)$$

$$y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 1) \ \rightarrow \ y + 1 = \frac{-1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

---

39) يعطى منحنى المعادلة الوسيطية :

$$x = 2(t - sin\, t)$$

$$y = 2(1 - cos\, t) \ , \ 0 \le t \le 2\pi$$

اثبت أن معادلة المماس والعمودي عليه لمنحنى هذه العلاقة عندما $t = \frac{\pi}{4}$ هما $1 + \sqrt{2}$, $1 - \sqrt{2}$ على الترتيب .

نجد $\frac{dy}{dx}$ أولاً :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$x = 2(t - \sin\, t) \rightarrow \frac{dx}{dt} = 2(1 - \cos\, t)$$

$$y = 2(1 - \cos\, t) \rightarrow \frac{dy}{dt} = 2(+\sin\, t)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2\sin\, t}{2(1 - \cos\, t)} = \frac{\sin\, t}{1 - \cos\, t}$$

$$M_1 = \frac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{1 - \cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2} - 1} * \frac{(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} + 1)} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} = \sqrt{2} + 1$$

$\therefore$ $M_1 = \sqrt{2} + 1$ ميل المماس

ميل العمودي على المماس

$$M_1 \times M_2 = -1$$

$$(\sqrt{2} + 1) \times M_2 = -1$$

$$M_2 = \frac{-1}{\sqrt{2} + 1} * \frac{(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} - 1)} = \frac{-\sqrt{2} + 1}{2 - 1}$$

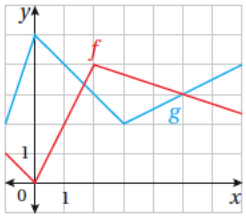
$$\therefore M_2 = 1 - \sqrt{2}$$

J. Haitham Harb
JoSchool-Online
0797771137

يبين الشكل المجاور منحنى الاقترانين $g(x)\ ,\ h(x)$

اذا كان $h(x)=f\big(g(x)\big)$ وكان $p(x)=g(f(x))$

فأجد كُلًّ ممّا يأتي



40) $h'(1)=??$

$$h(x)=f\big(g(x)\big)$$

$$h'(x)=f'\big(g(x)\big).g'(x)$$

$$h'(1)=f'\big(g(1)\big).g'(1)$$

$$h'(1)=f'(4).g'(1)$$

من الرسمة $g(1)=4$

لنجد $g'(1)$ و $f'(4)$ نستخدم قاعدة الميل الهندسي :

$$M=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

أولا : $g'(1)$ رح نوخذ نقطتين على g

تحققه حول العدد $1 \leftarrow (1,4),(2,3)$

$$g'(1)=M=\frac{4-3}{1-2}=-1$$

ثانيا : نكرر العملية لنجد $f'(4)$

بأخذ نقطتين على f حول $4 \leftarrow (2,4),(5,3)$

$$f'(4)=M=\frac{4-3}{2-5}=\frac{-1}{3}$$

$$\therefore\ h'(1)=f'(4).g'(1)=-1\left(\frac{-1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

41) $P'(1)=??$

$$P(x)=g\big(f(x)\big)$$

$$P'(x)=g'\big(f(x)\big).f'(x)$$

$$P'(1)=g'\big(f(1)\big).f'(1)\quad ,\quad f(1)=2$$

$$P'(1)=g'(2).f'(1)$$

نجد $f'(1)$ بأخذ نقطتين على (f) :

$$(1,2),(0,0)$$

$$f'(1)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2-0}{1-0}=2$$

نجد $g'(2)$ بأخذ نقطتين عليه : $(1,4),(2,3)$

$$g'(2)=\frac{4-3}{1-2}=-1$$

$$\therefore\ P'(1)=g'(2)f'(1)=(-1)(2)=-2$$

إذا كان الاقتران $y=Ln(ax+b)$ حيث :

$a\ ,\ b$ ثابتان موجبان وكان ميل المماس لمنحنى الاقتران عند P يساوي 1 ، فأجب عن السؤالين التاليين :

42) اثبت ان الاحداثي x للنقطة P أقل من 1

الحل :

$P(x_\circ\ ,y_\circ)$ هي نقطة التماس وعندها :

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0}=1$$

اثبت ان $x_\circ<1$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{ax+b}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0} = \frac{a}{ax_0+b} = \frac{1}{1}$$

$$a = ax_0 + b \rightarrow \frac{ax_0}{a} = \frac{a-b}{a}$$

$$x_0 = \frac{a-b}{a} = \frac{a}{a} - \frac{b}{a} = 1 - \frac{b}{a}$$

ولأن $a > 0$, $b > 0$ $\leftarrow$ $\frac{b}{a} > 0$

ومنه : $x_\circ = 1 - \frac{b}{a} < 1$

---

43) أجد قيمة كل من b, a علماً بأن P هي النقطة $(0, 2)$ ثم برر اجابتك

الحل :

$$y = f(x) = \text{Ln}\,(ax+b)$$

$$y' = f'(x) = \frac{a}{ax+b}$$

ميل المماس عند $P(0,2)$ يساوي 1 أي أن :

$$f'(0) = 1$$

$$f'(0) = \frac{a}{b} = 1$$

$$a = b$$

$$f(0) = \text{Ln}\,(b) = 2$$

$$b = e^2$$

$$a = b = e^2$$

44) جد احداثي النقطة التي يكون عندها ميل المماس $\frac{1}{2}$

الحل :

اولاً : المطلوب نقطة التماس التي تكون عندها الميل $= \frac{1}{2}$

نفرضها $Q(x_1, y_1)$

$$f'(x) = \frac{a}{ax+b}$$

$$f'(x_1) = \frac{a}{ax_1+b} = \frac{1}{2}$$

$$2a = ax_1 + b \ldots ①$$

احنا بحاجة لـ $(b\,,a)$

$$2a = ax_1 + b \ldots ①$$

ثانياً : لدينا نقطة تماس اخرى وهي $P(0,2)\,, x_\circ = 0$

وعندها الميل $= 1$

$$f'(0) = \frac{a}{a(0)+b} = 1$$

$$\frac{a}{b} = 1 \quad \rightarrow \quad a = b \ldots .. ②$$

عوض ② في ①

$$2a = ax_1 + a$$

$$-a \qquad -a$$

$$\frac{ax_1}{a} = \frac{a}{a}$$

$$x_1 = 1$$

$$y_1 = f(x_1) = f(1) = \text{Ln}\,(a(1)+a)$$

$$y_1 = \text{Ln}\,(2a)$$

$$\therefore Q\,(1\,, \text{Ln}\,2a)$$

T. Haitham Harb
JoSchool-Online
0797771137

يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية :

$$x = t^2 \quad , \quad y = 2t$$

45) جد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t

الحل :

$$\frac{dy}{dt} = 2 \quad , \quad \frac{dx}{dt} = 2t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2}{2t} = \frac{1}{t}$$

46) جد معادل العمودي على مماس المنحنى عند النقطة $(t^2 , 2t)$

الحل :

ميل المماس :

$$m = \frac{dx}{dx} = \frac{1}{t}$$

ميل العمودي على المماس :

$$m = \frac{-1}{\frac{1}{t}} = -t$$

معادلة العمودي على المماس

$$y - 2t = -t(x - t^2)$$

$$y = -tx + t^3 + 2t$$

47) اثبت أن مساحة المثلث المكون من العمودي على المماس والمحورين الاحداثيين هي : $\frac{1}{2}|t|(2 + t^2)^2$

الحل :

لايجاد المقطع x للعمودي على المماس نضع $y = 0$

$$0 = -tx + t^3 + 2t$$

$$x = \frac{t^3 + 2t}{t} = t^2 + 2$$

لايجاد المقطع y للعمودي على المماس نضع $x = 0$

$$y = -t(0) + (0)^3 + 2(0) = t^3 + 2t$$

مساحة المثلث :

$$A = \frac{1}{2}|t^2 + 2||t^3 + 2t|$$

$$= \frac{1}{2}|t^2 + 2||t(t^2 + 2)|$$

$$= \frac{1}{2}|t(t^2 + 2)^2|$$

$$= \frac{1}{2}|t|(t^2 + 2)^2$$

T. Haitham Harb
JoSchool-Online
0797771137

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

48) $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$

$$f(x) = \left(\sin x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\sin x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\cos x^{\frac{1}{2}}\right).\left(\frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$f'(x) = \frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\sin\sqrt{x}}}$$

49) $y = e^x \sin^2 x \cos x$

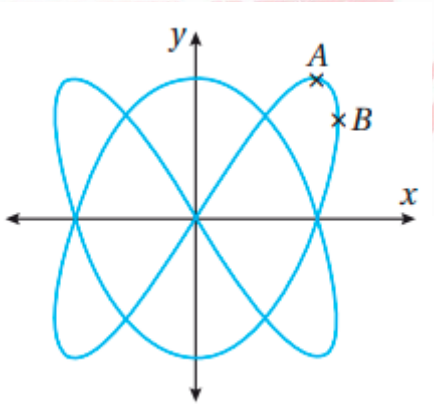
$$f(x) = (e^x \sin^2 x)(\cos x)$$

$$f'(x) = (e^x \sin^2 x)(-\sin x) + (\cos x)\left((e^x)(2\sin x\cos x) + (\sin^2 x(e^x)\right)$$

$$f'(x) = -e^x \sin^2 x + 2e^x \cos^2 x \sin x + e^x \cos x \sin^2 x$$

يبين الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطية :

$$x = \sin 2t \ , \ y = \sin 3t \ , \ 0 \le t \le 2\pi$$



50) إذا كان مماس منحنى المعادلة افقياً عند النقطة A الواقعة في الربع الأول ، جد احداثي A

الحل :

$$\frac{dy}{dt} = 3\cos 3t = 0 \longrightarrow \cos 3t = 0$$

$$3t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$$

$$t = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \ldots \longrightarrow t = \frac{\pi}{6}$$

لأن A في الربع الاول

$$t = \frac{\pi}{6} : \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{6}} = 2\cos 2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 \neq 0$$

$$(x, y) = \left(\sin 2\left(\frac{\pi}{6}\right), \sin 3\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$$

اذن احداثي النقطة A التي يكون عندها المماس افقياً $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$

51) إذا كان مماس المنحنى موازياً للمحور y عند النقطة B

جد احداثي B ؟

الحل :

المطلوب : النقطة B التي يكون عندها المماس عمودي

$$\frac{dx}{dt} = 2\cos 2t = 0 \rightarrow \cos 2t = 0$$

$$2t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$$

$$t = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \ldots \rightarrow t = \frac{\pi}{4}$$

لأن B في الربع الأول

$$t = \frac{\pi}{4} : \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\frac{\pi}{4}} = 3\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{-3}{\sqrt{2}} \neq 0$$

$$(x, y) = \left(\sin\frac{2\pi}{4}, \sin\frac{3\pi}{4}\right) = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

النقطة B التي يكون عندها المماس عمودي

T. Haitham Harb
JoSchool-Online
0797771137

52) إذا مر فرعان من المنحنى بنقطة الاصل كم هو موضح في الشكل فجد ميل المماس لكل منهم عند نقطة الأصل

الحل :

نقطة الأصل $(\sin 2t \ , \sin 3t) = (0;0)$

بدنا قيم t التي تجعل $x = 0$ و $y = 0$ لتكون النقطة (0.0)

ثم نجد الميل عندها قيم (t)

- $x = \sin\ 2t = 0$

$2t = 0 \ , \pi \ , 2\pi \ , 3\pi \ , 4\pi$

$t = 0 \ , \frac{\pi}{2} , \pi \ , \frac{3\pi}{2} \ , 2\pi$

- $y = \sin\ 3t = 0$

$3t = 0 \ , \pi \ , 2\pi \ , 3\pi \ , 4\pi \ , 5\pi \ , 6\pi$

$t = 0 \ , \frac{\pi}{3} \ , \frac{2\pi}{3} \ , \pi \ , \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{5\pi}{3} , 2\pi$

ما هي قيم t التي تجعل $x = 0 \ , y = 0$ معاً ؟

يكون الجسم عند نقطة الأصل عندما $t = 0 \ , \pi \ , 2\pi$

الان نجد ميل المماس

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3\cos\ 3t}{2\cos\ 2t}$$

$$t = 0 : M = \frac{dy}{dx}\Big|_{t=0} = \frac{3\cos\ 3(0)}{2\cos\ 2(0)} = \frac{3}{2}$$

$$t = \pi : M = \frac{dy}{dx}\Big|_{t=\pi} = \frac{3\cos\ 3\pi}{2\cos\ 2\pi} = -\frac{3}{2}$$

$$t = 2\pi : M = \frac{dy}{dx}\Big|_{t=2\pi} = \frac{3\cos\ 3(2\pi)}{2\cos\ 2(2\pi)} = \frac{3}{2}$$

اذن ميل المماس للفرعان المادان بنقطة الاصل هما

$$M_1 = \frac{3}{2} \quad , \quad M_2 = \frac{-3}{2}$$

يمثل الاقتران $S(t) = Ln\ (t^2 - 2t + 1.9), t \geq 0$ موقع جُسَيْم يتحرّك في مسار مستقيم، حيث S الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني .

53) جد سرعة الجسيم وتسارعه بعد t ثانية .

$$V(t) = S'(t) = \frac{2t - 2}{t^2 - 2t + 1.9}$$

$$a(t) = V'(t) = S''(t)$$

$$a(t) = \frac{(t^2 - 2t + 1.9)(2) - (2t - 2)(2t - 2)}{(t^2 - 2t + 1.9)^2}$$

$$a(t) = \frac{2t^2 - 4t + 3.8 - (4t^2 - 8t + 4)}{(t^2 - 2t + 1.9)^2}$$

$$a(t) = \frac{2t^2 - 4t + 3.8 - 4t^2 + 8t - 4}{(t^2 - 2t + 1.9)^2}$$

$$a(t) = \frac{-2t^2 + 4t - 0.2}{(t^2 - 2t + 1.2)^2}$$

54) جد موقع الجسيم وتسارعه عندما تكون سرعته تساوي صفراً

$$V(t) = 0$$

$$\frac{2t - 2}{t^2 - 2t + 1.9}$$

$$2t - 2 = 0$$

$$t = 1$$

$$S(1) = \text{Ln}\ (1^2 - 2(1) + 1.9) = \text{Ln}\ (0.9)$$

$$a(1) = \frac{-2(1)^2 + 4(1) - 0.2}{(1^2 - 2(1) + 1.9)^2} = \frac{1.8}{(0.9)^2}$$

Mr. Haitham Harb JoSchool-Online 0797771137

55) متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي

تذكر : تكون الجسم في موقعه الابتدائي أومره عندما $t = 0$

اين الموقع الابتدائي عندما $(t = 0)$ ؟

$$S(0) = \text{Ln}\,(0 - 0 + 1.9) = \text{Ln}(1.9)$$

المطلوب : قيمة t عندما $S(t) = Ln(1.9)$

$$\text{Ln}\ (t^2 - 2t + 1.9)\ = \text{Ln}\ 1.9$$

$$e^{\text{Ln}\,(t^2-2t+1.9)} = e^{\text{Ln}1.9}$$

$$t^2 - 2t + 1.9 = 1.9$$

$$t^2 - 2t = 0 \longrightarrow t(t-2) = 0$$

$$t = 0 \quad , \quad t = 2$$

اذن يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي عندما $t = 2$

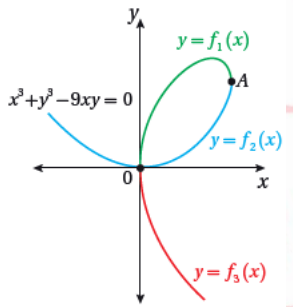
T. Haitham Harb
JoSchool-Online
0797771137

الاشتقاق الضمني

العلاقة الضمنية ومشتقتها

جميع الاقترانات التي درسْتُ مشتقاتها حتى الآن هي اقترانات تُكتَب في صورة $y = f(x)$ بوجه عام ؛ أيْ إنَّه يُمكِن فيها التعبير عن مُتغيِّرٍ صراحةً بدلالةِ مُتغيِّر آخر مثل الاقترانات الآتية :

$$y = \sqrt[3]{x-1} \quad , \quad y = \frac{7x}{x^2+9} \quad , \quad y = x^3 - 8x$$



أُلاحِظ أنَّه توجد معادلات، مثل $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ يصعب (أو لا يُمكِن) كتابتها بصورة صريحة كما يأتي $y = f(x)$ ، لأنها حقيقةً تحوي داخلها أكثر من اقتران. فمثلاً، تتكوَّن المعادلة $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ من ثلاثة اقترانات، هي : f_1 , f_2 , f_3 كما في الشكل المجاور. ولكنْ ، لا يُمكِن كتابة هذه الاقترانات بصورة صريحة ؛ لذا تمثل هذه المعادلة علاقة ضمنية

ولكن كيف يمكن إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لعلاقة ضمنية، ولا يُمكِن - في الوقت نفسه- كتابتها في صورة اقتران بصورة صريحة كما يأتي : $y = f(x)$ ؟

يُطلَق على عملية إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لعلاقة ضمنية اسم الاشتقاق الضمني ويمكن تلخيص خطوات اجرائها كما يأتي :

مفهوم أساسي الاشتقاق الضمني

بافتراض أنَّ معادلةً تُعرِّف y ضمنيًّا بوصفه اقترانًا قابلًا للاشتقاق بالنسبة إلى x، فإنَّه يُمكِن إيجاد $\frac{dy}{dx}$ باتِّباع الخطوات الآتية:

- **الخطوة 1:** أشتق طرفي المعادلة بالنسبة إلى x، مراعيًا استعمال قاعدة السلسلة عند اشتقاق حدود تتضمَّن المُتغيِّر y.
- **الخطوة 2:** أُرتِّب حدود المعادلة بحيث تصبح جميع الحدود التي تحوي $\frac{dy}{dx}$ في طرف المعادلة الأيسر، والحدود الأُخرى في طرف المعادلة الأيمن.
- **الخطوة 3:** أُخرِج $\frac{dy}{dx}$ عاملًا مشتركًا من حدود طرف المعادلة الأيسر.
- **الخطوة 4:** أحُلُّ المعادلة بالنسبة إلى $\frac{dy}{dx}$.

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

مثال 1

ص. 57

$$a)\ x^2 + y^2 = 4$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(4)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\div 2 \quad \div 2 \quad \div 2$$

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$-x \qquad -x$$

$$y\frac{dy}{dx} = -x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

$b)\ \sin x + \cos y = 2x - 3y$

$$\frac{d}{dx}(\sin x + \cos y) = \frac{d}{dx}(2x - 3y)$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) + \frac{d}{dx}(\cos y) = \frac{d}{dx}(2x) - \frac{d}{dx}(3y)$$

$$\cos x - \sin(y)\frac{dy}{dx} = 2 - 3\frac{dy}{dx}$$

$$\cos x - \sin(y)\frac{dy}{dx} + 3\frac{dy}{dx} = 2$$

$-\cos x$ $\qquad$ $-\cos x$

$$3\frac{dy}{dx} - \sin y\frac{dy}{dx} = 2 - \cos x$$

$$\frac{dy}{dx}(3 - \sin y) = 2 - \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - \cos x}{3 - \sin y}$$

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

اتحقق من فهمي

ص. 58

$a)\ x^2 + y^2 = 13$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(13)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$\div 2$ $\quad \div 2$ $\quad \div 2$

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

$-x$ $\qquad$ $-x$

$$y\frac{dy}{dx} = -x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

$b)\ 2x + 5y^2 = \sin y$

$$\frac{d}{dx}(2x + 5y^2) = \frac{d}{dx}(\sin y)$$

$$\frac{d}{dx}(2x) + \frac{d}{dx}(5y^2) = \frac{d}{dx}(\sin y)$$

$$2 - 10y\frac{dy}{dx} = \cos y\frac{dy}{dx}$$

$$-\cos y\frac{dy}{dx} - 10y\frac{dy}{dx} = +2$$

$$-\cos y\frac{dy}{dx} - 10y\frac{dy}{dx} = +2$$

$$\frac{dy}{dx}(3 - \cos y - 10y) = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3 - \cos y - 10y}$$

أحتاج في بعض المسائل إلى استعمال قاعدتي مشتقة الضرب ومشتقة القسمة، إضافةً إلى قاعدة السلسلة ؛ لإيجاد مشتقة علاقة ضمنية

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

مثال 2

ص. 58

$1)\ 2xy - y^3 = 1$

$$\frac{d}{dx}(2xy - y^3) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$\frac{d}{dx}(2xy) - \frac{d}{dx}(y^3) = 0$$

$$(2x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y)(2) - 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x\frac{dy}{dx} - 3y^2\frac{dy}{dx} = -2y$$

$$\frac{dy}{dx}(2x - 3y^2) = -2y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2y}{2x - 3y^2}$$

Haitham Harb
JoSchool-Online
0797771137

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

اتحقق من فهمي

ص. 60

1) $3xy^2 + y^3 = 8$

$$\frac{d}{dx}(3xy^2 + y^3) = \frac{d}{dx}(8)$$

$$\frac{d}{dx}(3xy^2) + \frac{d}{dx}(y^3) = 0$$

$$(6xy)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (3y^2) + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$6xy\frac{dy}{dx} + 3y^2\frac{dy}{dx} = -3y^2$$

$$\frac{dy}{dx}(6xy - 3y^2) = -3y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3y^2}{6xy - 3y^2}$$

---

2) $tan(x-y) = 2xy^3 + 1$

$$\frac{d}{dx}(tan(x-y)) = \frac{d}{dx}(2xy^3 + 1)$$

$$\left(1 - \frac{dy}{dx}\right)sec^2(x-y) = 6xy^2\frac{dy}{dx} + 2y^3$$

$$sec^2(x-y) - sec^2(x-y)\frac{dy}{dx} = sec^2(x-y) - 2y^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{sec^2(x-y) - 2y^3}{6xy^2 + sec^2(x-y)}$$

---

3) $x^2 = \frac{x-y}{x+y}$

$$\frac{d}{dx}(x^2) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$$

$$2x(x+y)^2 = x - x\frac{dy}{dx} + y - y\frac{dy}{dx} - x - x\frac{dy}{dx} + y + y\frac{dy}{dx}$$

$$2x\frac{dy}{dx} = 2y - 2x(x+y)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 2x(x+y)^2}{2x} = \frac{y - x(x+y)^2}{x}$$

2) $\sin(x+y) = y^2\cos x$

$$\frac{d}{dx}(sin(x+y)) = \frac{d}{dx}(y^2\cos x)$$

$$\cos(x+y).(1 + \frac{dy}{dx}) = y^2(-\sin x) + \cos x\ 2y\frac{dy}{dx}$$

$$\cos(x+y) + \cos(x+y)\frac{dy}{dx} = -y^2\sin x + 2y\cos x\ \frac{dy}{dx}$$

$$\cos(x+y)\frac{dy}{dx} - 2y\cos x\ \frac{dy}{dx} = -y^2\sin x - \cos(x+y)$$

$$\frac{dy}{dx}(\cos(x+y) - 2y\cos x) = -y^2\sin x - \cos(x+y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2\sin x - \cos(x+y)}{(\cos(x+y) - 2y\cos x)}$$

أخطاء شائعة

يُخطئ بعض الطلبة عند إيجاد مشتقة: $(\sin(x+y))$، وذلك بإيجاد مشتقة الاقتران المثلثي من دون إيجاد مشتقة الزاوية، باستعمال قاعدة السلسلة كما يأتي: ~~$\frac{d}{dx}(\sin(x+y)) = \cos(x+y)\frac{dy}{dx}$~~

3) $y^2 = \frac{x-1}{x+1}$

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)(1) - (x-1)(1)}{(x+1)^2}$$

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}$$

$$\frac{1}{2} \times \left(2y\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{2}{(x+1)^2}\right) \times \frac{1}{2}$$

$$\frac{y}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x+1)^2\,y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x+1)^2 y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y\,(x+1)^2}$$

JoSchool Online 0797771137

ميل المماس لمنحنى علاقة ضمنية

يُمكِن إيجاد ميل المماس لمنحنى علاقة ضمنية عند أيِّ نقطة تُحقِّق المعادلة، وذلك بإيجاد $\frac{dy}{dx}$ أوَّلاً، ثم تعويض قيمتي x و y للنقطة المطلوب إيجاد قيمة الميل عندها .

مثال 3 ص. 60

أ - جد ميل المماس لمنحنى العلاقة $e^{2x} \ln y = x + y - 2$ عند النقطة $(1,1)$

$$M = \frac{dy}{dx}\Big|_{(1,1)} \quad ?$$

$$e^{2x} \ln y = x + y - 2$$

$$\frac{d}{dx}(e^{2x} \ln y) = \frac{d}{dx}(x + y - 2)$$

$$e^{2x} \frac{\frac{dy}{dx}}{y} + \ln y \,(e^{2x}\, 2) = 1 + \frac{dy}{dx} - 0$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{e^{2x}}{y} + 2e^{2x} \ln y = 1 + \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{e^{2x}}{y} - \frac{dy}{dx} = 1 - 2e^{2x} \ln y$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{e^{2x}}{y} - 1\right) = 1 - 2e^{2x} \ln y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2e^{2x} \ln y}{\frac{e^{2x}}{y} - 1}$$

$$\rightarrow M = \frac{dy}{dx}\Big|_{(1,1)}$$

$$= \frac{1 - 2e^{2(1)} \ln 1}{\frac{e^{2(1)}}{1} - 1} = \frac{1 - 0}{e^2 - 1}$$

$$M = \frac{1}{e^2 - 1}$$

ب - جد ميل المماس لمنحنى العلاقة $y^2 = x$ عندما $x = 4$

$$y^2 = x$$

$$\frac{d}{dx}\, y^2 = \frac{d}{dx}\, x$$

$$2y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

$$M = \frac{dy}{dx}\Big|_{(4,??)}$$

بدنا y عندما $x = 4$

$y^2 = 4 \rightarrow y = \pm 2 \rightarrow$ النقاط $(4,2), (4,-2)$

$(4,2)$:

$$M = \frac{dy}{dx}\Big|_{(2,4)} = \frac{1}{2(2)} = \frac{1}{4}$$

$(4,-2)$:

$$M = \frac{dy}{dx}\Big|_{(4,-2)} = \frac{1}{2(-4)} = \frac{1}{-4}$$

أ - جد ميل المماس لمنحنى العلاقة $y^2 = \ln x$ ، عند النقطة $(e,1)$

اتحقق من فهمي ص. 61

$$M = \frac{dy}{dx}\Big|_{(e,1)} \quad ?$$

$$y^2 = \ln x$$

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(\ln x)$$

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2xy}$$

T. Haitham Harb JoSchool Online 0797771137

$$\rightarrow M = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)}$$

$$= \frac{1}{2(e)(1)} = \frac{1}{2e}$$

$$M = \frac{1}{2e}$$

ب - جد ميل المماس لمنحنى العلاقة

$(y-3)^2 = 4(x-5)$ ، عندما $x = 6$

$$(y-3)^2 = 4(x-5)$$

$$\frac{d}{dx}((y-3)^2) = \frac{d}{dx}(4(x-5))$$

$$2(y-3)\frac{dy}{dx} = 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{2(y-3)} = \frac{2}{y-3}$$

$$M = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(6,??)}$$

بدنا y عندما $x = 6$

$$(y-3)^2 = 4(6-5)$$

$$(y-3)^2 = 4$$

$$y-3 = 2 \quad or \quad y-3 = -2$$

$$y = 5 \quad or \quad y = 1$$

النقاط $(6,5)$, $(6,1)$

$(6,5)$:

$$M = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(6,5)} = \frac{2}{5-3} = 1$$)

$(6,1)$:

$$M = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(6,1)} = \frac{2}{1-3} = -1$$

معادلة المماس لمنحنى علاقة ضمنية

يُمكِن إيجاد معادلة المماس لمنحنى علاقة ضمنية بإيجاد ميله، ثم التعويض في الصورة العامة لمعادلة المستقيم

مثال 4 ص. 62

جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة $x^2 - xy + y^2 = 7$ عند النقطة $(-1, 2)$

$$\frac{d}{dx}(x^2 - xy + y^2) = \frac{d}{dx}(7)$$

$$2x - (x\frac{dy}{dx} + y) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x - x\frac{dy}{dx} - y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$-x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = -2x + y$$

$$\frac{dy}{dx}(-x + 2y) = -2x + y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 2x}{2y - x}$$

$$M = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-1,2)} = \frac{2 - 2(-1)}{2(2) - (-1)} = \frac{4}{5}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (2) = \frac{4}{5}(x - (-1))$$

$$y = \frac{4}{5}x + \frac{14}{5}$$

T. Haitham Harb
JoSchool-Online
0797771137

جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة $x^3 + y^3 - 3xy = 17$ عند النقطة $(2, 3)$

اتحقق من فهمي

ص. 63

$$\frac{d}{dx}(x^3 + y^3 - 3xy) = \frac{d}{dx}(17)$$

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} + (-3x\frac{dy}{dx} + y(-3)) = 0$$

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - 3x\frac{dy}{dx} + -3y = 0$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} - 3x\frac{dy}{dx} = 3y - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}(3y^2 - 3x) = 3y - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - 3x^2}{3y^2 - 3x} = \frac{3(y - x^2)}{3(y^2 - x)} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

$$M = \frac{dy}{dx}\Big|_{(2,3)} = \frac{3 - 2^2}{3^2 - 2} = \frac{-1}{7}$$

$$y - 3 = \frac{-1}{7}(x - 2) \rightarrow y = \frac{-1}{7}x + \frac{2}{7} + 3$$

$$\rightarrow y = \frac{-1}{7}x + \frac{23}{7}$$

المشتقة الثانية للعلاقات الضمنية

تعلَّمْتُ في الأمثلة السابقة استعمال الاشتقاق الضمني لإيجاد $\frac{dy}{dx}$ وسأتعلَّم الآن كيف أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ باستعمال الاشتقاق الضمني، وذلك باشتقاق $\frac{dy}{dx}$ بالنسبة إلى المُتغيِّر x علمًا بأنَّه إذا احتوت المشتقة الأولى على فإنَّ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ستحتوي على الرمز $\frac{dy}{dx}$ الذي يُمكِن حذفه بتعويض قيمته .

مثال 5

ص. 63

اذا كان $2x^3 - 3y^2 = 8$ ، فأجد $\frac{d^2y}{dx^2}$

خطوة (1) : اشتق الطرفين

$$\frac{d}{dx}(2x^3 - 3y^2) = \frac{d}{dx}(8)$$

$$6x^2 - 6y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$6y\frac{dy}{dx} = 6x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2}{6y} = \frac{x^2}{y}$$

خطوة (2) : جد المشتقة الثانية

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y(2x) - (x^2)\frac{dy}{dx}}{y^2}$$

استبدل قيمة $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y(2x) - (x^2)\frac{x^2}{y}}{y^2}$$

$$= \frac{2xy - \frac{x^4}{y}}{y^2}$$

$$= \frac{\frac{2xy^2 - x^4}{y}}{y^2}$$

$$= \frac{2xy^2 - x^4}{y^3}$$

T. Haitham Hrb JoSchool-Online 0797771137

اتحقق من فهمي

ص. 64

اذا كان $xy + y^2 = 2x$ فجد $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$xy + y^2 = 2x$$

$$x\frac{dy}{dx} + y(1) + 2y\,y' = 2$$

$$x\frac{dy}{dx} + 2y\,y' = 2 - y$$

$$\frac{dy}{dx}(x + 2y) = 2 - y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - y}{x + 2y}$$

نشتق مرة أخرى

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x + 2y)(-y') - (2 - y)(1 + 2y')}{(x + 2y)^2}$$

استبدل y'

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x + 2y)(-\frac{2 - y}{x + 2y}) - (2 - y)(1 + 2(\frac{2 - y}{x + 2y}))}{(x + 2y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x + 2y)(\frac{y - 2}{x + 2y}) - (2 - y)(1 + (\frac{4 - 2y}{x + 2y}))}{(x + 2y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{xy - 2x + 2y^2 - 4y}{x + 2y} - (2 - y)(1 + (\frac{4 - 2y}{x + 2y}))}{(x + 2y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{xy - 2x + 2y^2 - 4y}{x + 2y} - (2 - y)(\frac{x + 2y + 4 - 2y}{x + 2y})}{(x + 2y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{xy - 2x + 2y^2 - 4y}{x + 2y} - \frac{(2 - y)(x + 4)}{x + 2y}}{(x + 2y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{xy - 2x + 2y^2 - 4y}{x + 2y} - \frac{(2x + 8 - xy - 4y)}{x + 2y}}{(x + 2y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{xy - 2x + 2y^2 - 4y - 2x - 8 + xy + 4y}{x + 2y}}{(x + 2y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{2xy - 4x + 2y^2 - 8}{x + 2y}}{(x + 2y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2xy - 4x + 2y^2 - 8}{(x + 2y)^3}$$

المشتقة الثانية للمعادلات الوسيطية

تعلَّمْتُ في الدرس السابق كيفية إيجاد مشتقة المعادلات الوسيطية. وسأتعلَّم الآن كيف أجد المشتقة الثانية للمعادلات الوسيطية باستعمال الاشتقاق الضمني

مفهوم أساسي — المشتقة الثانية للمعادلة الوسيطية

إذا كان h و g اقترانين قابلين للاشتقاق عند t، وكان كلٌّ من: $x = h(t)$، و $y = g(t)$، و $\frac{dy}{dx}$ قابلًا للاشتقاق عند t، فإنَّ:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}, \quad \frac{dx}{dt} \neq 0$$

مثال 6 جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية الاتية عندما $t = 1$:

ص. 64

$$x = t^3 + 3t^2\,,\quad y = t^4 - 8t^2$$

$$y = t^4 - 8t^2 \rightarrow \frac{dy}{dt} = 4t^3 - 16t$$

$$x = t^3 + 3t^2 \rightarrow \frac{dx}{dt} = 3t^2 + 6t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4t^3 - 16t}{3t^2 + 6t}$$

$$= \frac{4t(t^2-4)}{3t(t+2)}$$

$$= \frac{4}{3}\frac{(t-2)(t+2)}{(t+2)}$$

$$= \frac{4}{3}(t-2)$$

الان نجد المشتقة الثانية $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}(t-2)\right)}{3t^2+6t}$$

$$= \frac{\frac{4}{3}}{3t^2+6t}$$

$$= \frac{4}{3(3t^2+6t)} = \frac{4}{9t^2+18t}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1} = \frac{4}{9(1)^2+18(1)}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1} = \frac{4}{27}$$

اتحقق من فهمي

ص. 65

جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية الاتية عندما $t=2$:

$$x = 3t^2+1 \quad , \quad y = t^3-2t^2$$

$$\frac{dy}{dt} = 3t^2-4t \quad , \quad \frac{dx}{dt} = 6t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2-4t}{6t}$$

$$= \frac{t(3t-4)}{6t} = \frac{3t-4}{6}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{3t-4}{6}\right)}{6t}$$

$$= \frac{\frac{3}{6}}{6t} = \frac{\frac{1}{2}}{6t}$$

$$= \frac{1}{12t}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=2} = \frac{1}{12(2)} = \frac{1}{24}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=2} = \frac{1}{24}$$

الاشتقاق اللوغاريتمي

أحتاج أحيانًا إلى إيجاد مشتقات اقترانات غير لوغاريتمية مُعقَّدة ، تتضمَّن ضربًا ، أو قسمةً ، أو قوًى وفي هذه الحالة ، يُفضَّل أنْ أستعمل اللوغاريتمات ؛ لتبسيط هذه الاقترانات أوَّلاً ، ثم إيجاد مشتقاتها ، وتُسمّى هذه الطريقة الاشتقاق اللوغاريتمي .

مفهوم أساسي — الاشتقاق اللوغاريتمي

يُمكِن استعمال الاشتقاق اللوغاريتمي لإيجاد مشتقة بعض الاقترانات، باتِّباع الخطوات الآتية:

- **الخطوة 1:** أخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة: $y = f(x)$، ثم استعمال قوانين اللوغاريتمات لكتابة المقادير بالصورة المُطوَّلة.
- **الخطوة 2:** اشتقاق المعادلة ضمنيًّا بالنسبة إلى x.
- **الخطوة 3:** حلُّ المعادلة الناتجة لـ $\frac{dy}{dx}$، ثم وضع $f(x)$ بدلًا من y.

مثال 7

ص. 66

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي :

$$a)\ y = x^x \quad : x > 0$$

$$y = x^x$$

$$\ln y = \ln x^x$$

$$\ln y = x \ln x$$

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(x \ln x)$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = x\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1)$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = 1 + \ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = (1 + \ln x) \times y$$

$$\frac{dy}{dx} = (1 + \ln x)(x^x)$$

$$b)\ y = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$\ln y = \ln\left(\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+9}}\right)$$

$$\ln y = \ln(x-1)^2 - \ln\sqrt{x^2+9}$$

$$\ln y = 2\ln(x-1) - \ln(x^2+9)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ln y = 2\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x^2+9)$$

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}\left(2\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x^2+9)\right)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2(1)}{x-1} - \frac{2x}{2(x^2+9)}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x-1} - \frac{x}{(x^2+9)}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2(x^2+9) - x(x-1)}{(x-1)(x^2+9)}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2x^2+18-x^2+x}{(x-1)(x^2+9)}$$

$$y' = \frac{x^2+x+18}{(x-1)(x^2+9)} \times y$$

$$y' = \frac{x^2+x+18}{(x-1)(x^2+9)} \times \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$y' = \frac{(x^2+x+18)(x-1)}{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}$$

اتحقق من فهمي

ص. 67

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي :

$$a)\ y = x^{\sqrt{x}} \quad : x > 0$$

$$y = x^{\sqrt{x}}$$

$$\ln y = \ln x^{\sqrt{x}}$$

$$\ln y = \sqrt{x}\ln x$$

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(\sqrt{x}\ln x)$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \sqrt{x}\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right) \times y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{\sqrt{x}} + \frac{y\ln x}{2\sqrt{x}}$$

Mr. Haitham Harb
JoSchool-Online
0797771137

2) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{10}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$\frac{(-1)(2x)}{x^4}+\frac{(-1)(2y)\frac{dy}{dx}}{y^4}=0$$

$$\frac{-2}{x^3}-\frac{2}{y^3}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{2}{y^3}\frac{dy}{dx}=\frac{-2}{x^3}\quad\rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=\frac{-y^3}{x^3}$$

3) $(x^2+y^2)^2=50(x^2-y^2)$

$$\frac{d}{dx}((x^2+y^2)^2)=\frac{d}{dx}\left(50(x^2-y^2)\right)$$

$$2(x^2+y^2)\left(2x+2y\frac{dy}{dx}\right)=100x-100y\frac{dy}{dx}$$

$$2(x^2+y^2)2\left(x+y\frac{dy}{dx}\right)=100x-100y\frac{dy}{dx}$$

$$4(x^2+y^2)\left(x+y\frac{dy}{dx}\right)=100x-100y\frac{dy}{dx}$$

$$(x^2+y^2)\left(x+y\frac{dy}{dx}\right)=25x-25y\frac{dy}{dx}$$

$$x^3+y^2x+x^2y\frac{dy}{dx}+y^3\frac{dy}{dx}=25x-25y\frac{dy}{dx}$$

$$x^2y\frac{dy}{dx}+y^3\frac{dy}{dx}+25y\frac{dy}{dx}=25x-x^3-y^2x$$

$$\frac{dy}{dx}(x^2y+y^3+25y)=25x-x^3-y^2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{25x-x^3-y^2x}{x^2y+y^3+25y}$$

b) $y=\sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}}$

$$\ln y=\ln\left(\sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}}\right)=\ln\left(\frac{x-1}{x^4+1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x^4+1}\right)$$

$$\ln y=\frac{1}{2}\left(\ln(x-1)-\ln(x^4+1)\right)$$

$$\frac{d}{dx}(\ln y)=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\ln(x-1)-\ln(x^4+1))$$

$$\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{2x^2}{x^4+1}$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{1}{2(x-1)}-\frac{2x^2}{x^4+1}\right)\sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}}$$

أتدرّب وأحلُّ المسائل

1) $x^2-2y^2=4$

$$\frac{d}{dx}(x^2-2y^2)=\frac{d}{dx}(4)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2)-\frac{d}{dx}(2y^2)=0$$

$$2x-4y\frac{dy}{dx}=0$$

$$4y\frac{dy}{dx}=2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{4y}=\frac{x}{2y}$$

Haitham Harb JoSchool-Online 0797771137

4) $e^x y = xe^y$

$$e^x \frac{dy}{dx} + ye^x = xe^y \frac{dy}{dx} + e^y(1)$$

$$e^x \frac{dy}{dx} - xe^y \frac{dy}{dx} = e^y - ye^x$$

$$\frac{d}{dx}(e^x - xe^y) = e^y - ye^x$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{e^y - ye^x}{e^x - xe^y}$$

---

5) $3^x = y - 2xy$

$$\frac{d}{dx}(3^x) = \frac{d}{dx}(y - 2xy)$$

$$3^x \ln 3 = \frac{dy}{dx} - (2x \frac{dy}{dx} + 2y)$$

$$3^x \ln 3 = \frac{dy}{dx} - 2x \frac{dy}{dx} - 2y$$

$$3^x \ln 3 + 2y = \frac{dy}{dx} - 2x \frac{dy}{dx}$$

$$3^x \ln 3 + 2y = \frac{dy}{dx}(1 - 2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3^x \ln 3 + 2y}{1 - 2x}$$

---

6) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$

$$\frac{dy}{dx}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = \frac{dy}{dx}(5)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{y}} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{dy}{dx}\frac{1}{\sqrt{y}} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{1}{\sqrt{y}} = -\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

7) $x = \sec\frac{1}{y}$

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left(\sec\left(\frac{1}{y}\right)\right)$$

$$1 = \left(\sec\frac{1}{y}\tan\frac{1}{y}\right).\left(\frac{-1\frac{dy}{dx}}{y^2}\right)$$

$$\frac{1}{\sec\frac{1}{y}\tan\frac{1}{y}} = \frac{-1}{y^2}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2}{\sec\frac{1}{y}\tan\frac{1}{y}} = \frac{-y^2}{\frac{1}{\cos\frac{1}{y}}\frac{\sin\frac{1}{y}}{\cos\frac{1}{y}}}$$

$$= \frac{-y^2}{\frac{\sin\frac{1}{y}}{\cos^2\frac{1}{y}}} = \frac{-y^2\cos^2\frac{1}{y}}{\sin\frac{1}{y}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2\cos^2\frac{1}{y}}{\sin\frac{1}{y}}$$

8) $(\sin\pi x + \cos\pi y)^2 = 2$

$$\frac{d}{dx}((\sin\pi x + \cos\pi y)^2) = \frac{d}{dx}(2)$$

$$2(\sin\pi x + \cos\pi y).(\pi\cos\pi x - \sin\pi y\ (\pi\tfrac{dy}{dx})) = 0$$

$$(\sin\pi x + \cos\pi y).\pi(\cos\pi x - \frac{dy}{dx}\sin\pi y) = 0$$

$$(\sin\pi x + \cos\pi y).(\cos\pi x - \frac{dy}{dx}\sin\pi y) = 0$$

$$\sin\pi x\cos\pi x - \tfrac{dy}{dx}\sin\pi x\sin\pi y + \cos\pi y\cos\pi x - \tfrac{dy}{dx}\cos\pi y\sin\pi y = 0$$

$$\tfrac{dy}{dx}\sin\pi x\sin\pi y + \tfrac{dy}{dx}\cos\pi y\sin\pi y = \sin\pi x\cos\pi x + \cos\pi y\cos\pi x$$

$$\tfrac{dy}{dx}(\sin\pi x\sin\pi y + \cos\pi y\sin\pi y) = \sin\pi x\cos\pi x + \cos\pi y\cos\pi x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\pi x\cos\pi x + \cos\pi y\cos\pi x}{\sin\pi x\sin\pi y + \cos\pi y\sin\pi y}$$

Haitham Harb
eSchool-Online
0797771137

9) $\frac{x}{y^2} + \frac{y^2}{x} = 5$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y^2} + \frac{y^2}{x}\right) = \frac{d}{dx}(5)$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y^2}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{y^2}{x}\right) = \frac{d}{dx}(5)$

$\frac{y^2(1) - (x)\left(2y\frac{dy}{dx}\right)}{y^4} + \frac{(x)\left(2y\frac{dy}{dx}\right) - y^2(1)}{x^2} = 0$

$\frac{y^2 - 2xy\frac{dy}{dx}}{y^4} + \frac{2xy\frac{dy}{dx} - y^2}{x^2} = 0$

$\frac{y^2}{y^4} - \frac{2xy\frac{dy}{dx}}{y^4} + \frac{2xy\frac{dy}{dx}}{x^2} - \frac{y^2}{x^2} = 0$

$\frac{1}{y^2} - \frac{2x}{y^3}\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{y^2}{x^2} = 0$

$-\frac{2x}{y^3}\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}$

$\frac{dy}{dx}\left(-\frac{2x}{y^3} + \frac{2y}{x}\right) = \frac{y^2}{x^2} - \frac{1}{y^2}$

$\frac{dy}{dx}\left(\frac{-2x^2 + 2y^4}{y^3x}\right) = \frac{y^4 - x^2}{x^2y^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y^4 - x^2}{x^2y^2}}{\frac{-2x^2 + 2y^4}{y^3x}} = \frac{\frac{y^4 - x^2}{x^2y^2}}{\frac{2(y^4 - x^2)}{y^3x}} = \frac{y^4 - x^2}{x^2y^2} \times \frac{y^3x}{2(y^4 - x^2)}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \times \frac{y}{2} = \frac{y}{2x}$

10) $x + y = \cos xy$

$\frac{d}{dx}(x + y) = \frac{d}{dx}(\cos xy)$

$1 + \frac{dy}{dx} = -\sin xy\ (x\frac{dy}{dx} + y)$

$1 + \frac{dy}{dx} = -x\ \sin xy\ \frac{dy}{dx} - y \sin xy$

$\frac{dy}{dx} + x \sin xy\ \frac{dy}{dx} = -y \sin xy - 1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-y\ \sin xy - 1}{1 + x\ \sin xy}$

---

11) $x^2 + y^2 = \ln(x+y)^2$

$x^2 + y^2 = 2\ \ln(x+y)$

$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(2\ \ln(x+y))$

$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 2\frac{1 + \frac{dy}{dx}}{x+y}$

$x + y\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{dy}{dx}}{x+y}$

$\left(x + y\frac{dy}{dx}\right)(x+y) = 1 + \frac{dy}{dx}$

$x^2 + xy + yx\frac{dy}{dx} + y^2\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$

$yx\frac{dy}{dx} + y^2\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = 1 - x^2 - xy$

$\frac{dy}{dx}(yx + y^2 - 1) = 1 - x^2 - xy$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x^2 - xy}{(yx + y^2 - 1)}$

Haitham Hart
JoSchool-Online
0797771137

12) $\sin x \cos y = x^2 - 5y$

$$\frac{d}{dx}(\sin x \cos y) = \frac{d}{dx}(x^2 - 5y)$$

$$\sin x\left(-\sin y \frac{dy}{dx}\right) + \cos y \cos x = 2x - 5\frac{dy}{dx}$$

$$-\sin x \sin y \frac{dy}{dx} + \cos y \cos x = 2x - 5\frac{dy}{dx}$$

$$-\sin x \sin y \frac{dy}{dx} + 5\frac{dy}{dx} = 2x - \cos y \cos x$$

$$\frac{dy}{dx}(5 - \sin x \sin y) = 2x - \cos y \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - \cos y \cos x}{5 - \sin x \sin y}$$

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي عند القيمة المعطاة:

13) $2y^2 + 2xy - 1 = 0 \ , x = \frac{1}{2}$

$$\frac{d}{dx}(2y^2 + 2xy - 1) = 0$$

$$4y\frac{dy}{dx} + \left(2x\frac{dy}{dx} + 2y\right) - 0 = 0$$

$$4y\frac{dy}{dx} + 2x\frac{dy}{dx} = -2y$$

$$2y\frac{dy}{dx} + x\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\frac{dy}{dx}(2y + x) = -y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{2y + x}$$

بدنا y عندما $x = \frac{1}{2}$:

$$2y^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)y - 1 = 0$$

$$2y^2 + y - 1 = 0$$

$$(2y - 1)(y + 1) = 0$$

$$y = \frac{1}{2} \ , \ y = -1$$

اذن:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\frac{1}{2},-1)} = \frac{-(-1)}{2(-1) + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{-2 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{-3}{2}} = \frac{-2}{3}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})} = \frac{-\left(\frac{1}{2}\right)}{2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{-1}{3}$$

---

14) $y^3 + 2x^2 = 11y \quad , \quad y = 1$

$$\frac{d}{dx}(y^3 + 2x^2) = \frac{d}{dx}(11y)$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} + 4x = 11\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{11 - 3y^2}$$

بدنا x عندما $y = 1$:

$$(1)^3 + 2x^2 = 11(1)$$

$$1 + 2x^2 = 11$$

$$2x^2 = 10$$

$$x^2 = 5$$

$$x = \sqrt{5} \ , \ x = -\sqrt{5}$$

اذن:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-\sqrt{5},1)} = \frac{4(-\sqrt{5})}{11 - 3(1)^2} = \frac{-4\sqrt{5}}{8} = \frac{-\sqrt{5}}{2}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\sqrt{5},1)} = \frac{4(\sqrt{5})}{11 - 3(1)^2} = \frac{4\sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Haitham Haru · JoSchool Online · 0797771137

أجد ميل المماس لمنحنى كل علاقة ممّا يأتي عند لنقطة المعطاة :

15) $x^2 + y^2 = 25 \ , \ (3, -4)$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$y\frac{dy}{dx} = -x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

$$M = \frac{dy}{dx}\Big|_{(3,-4)} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

16) $x^2y = 4\,(2 - y) \ , \ (2, 1)$

$$\frac{d}{dx}(x^2y) = \frac{d}{dx}(4\,(2 - y))$$

$$x^2\frac{dy}{dx} + y\,(2x) = \frac{d}{dx}(8 - 4y)$$

$$x^2\frac{dy}{dx} + 2xy = -4\frac{dy}{dx}$$

$$x^2\frac{dy}{dx} + 4\frac{dy}{dx} = -2xy$$

$$\frac{dy}{dx}\,(x^2 + 4) = -2xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{x^2 + 4}$$

$$M = \frac{dy}{dx}\Big|_{(2,1)} = \frac{-2(2)(1)}{2^2 + 4} = \frac{-4}{8} = \frac{-1}{2}$$

17) $e^{\sin x} + e^{\cos y} = e + 1 \ , \ \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{d}{dx}(e^{\sin x} + e^{\cos y}) = \frac{d}{dx}(e + 1)$$

$$e^{\sin x}\,(\cos x) + e^{\cos y}\,(-\sin y)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$e^{\sin x}\cos x - e^{\cos y}\sin y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$e^{\cos y}\sin y\frac{dy}{dx} = e^{\sin x}\cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\sin x}\cos x}{e^{\cos y}\sin y}$$

$$M = \frac{dy}{dx}\Big|_{\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{e^{\sin\frac{\pi}{2}}\cos\frac{\pi}{2}}{e^{\cos\frac{\pi}{2}}\sin\frac{\pi}{2}} = 0$$

18) $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 5 \ , \ (8, 1)$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 5$$

$$\frac{d}{dx}(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}) = \frac{d}{dx}(5)$$

$$\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} + \frac{2}{3}y^{\frac{2}{3}-1}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} + \frac{2}{3}y^{\frac{-1}{3}}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{2}{3}(x^{\frac{-1}{3}} + y^{\frac{-1}{3}}\frac{dy}{dx}) = 0$$

$$x^{\frac{-1}{3}} + y^{\frac{-1}{3}}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$y^{\frac{-1}{3}}\frac{dy}{dx} = -x^{\frac{-1}{3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x^{\frac{-1}{3}}}{y^{\frac{-1}{3}}} = \frac{-y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{-\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}}$$

Haitham Harb JoSchool-Online 0797771137

أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة ممّا يأتي عند النقطة المعطاة :

19) $x^2 + xy + y^2 = 13 \quad , (-4, 3)$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + xy + y^2) = \frac{d}{dx}(13)$$

$$2x + (x\frac{dy}{dx} + y) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x + x\frac{dy}{dx} + y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = -2x - y$$

$$\frac{dy}{dx}(x + 2y) = -2x - y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y}{x + 2y}$$

$$M = \frac{dy}{dx}\Big|_{(-4,3)} = \frac{-2(-4) - 3}{-4 + 2(3)} = \frac{5}{2}$$

$$y - 3 = \frac{5}{2}(x + 4)$$

$$y = \frac{5}{2}x + 13$$

20) $x + y - 1 = ln(x^2 + y^2) \quad , (1, 0)$

$$\frac{d}{dx}(x + y - 1) = \frac{d}{dx}(\ln(x^2 + y^2))$$

$$1 + \frac{dy}{dx} - 0 = \frac{2x + 2y\frac{dy}{dx}}{x^2 + y^2}$$

$$(1 + \frac{dy}{dx})(x^2 + y^2) = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$$

$$x^2 + y^2 + x^2\frac{dy}{dx} + y^2\frac{dy}{dx} = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$$

$$x^2\frac{dy}{dx} + y^2\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx} = 2x - x^2 - y^2$$

$$\frac{dy}{dx}(x^2 + y^2 - 2y) = 2x - x^2 - y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - 2y}$$

$$M = \frac{dy}{dx}\Big|_{(1,0)} = \frac{2(1) - (1)^2 - 0}{1 + 0 - 0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$y - 0 = 1(x - 1) \rightarrow y = x - 1$$

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل مما يأتي :

21) $x + y = sin\, y$

$$\frac{d}{dx}(x + y) = \frac{d}{dx}(sin\, y)$$

$$1 + \frac{dy}{dx} - cos\, y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(1 - cos\, y) = -1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1 - cos\, y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1(sin\, y\ y')}{(1 - cos\, y)^2}$$

$$= \frac{sin\, y\ \frac{-1}{1 - cos\, y}}{(1 - cos\, y)^2}$$

$$= \frac{-sin\, y}{(1 - cos\, y)^3}$$

---

22) $4y^3 = 6x^2 + 1$

$$4y^3 = 6x^2 + 1$$

$$\frac{d}{dx}(4y^3) = \frac{d}{dx}(6x^2 + 1)$$

$$12\, y^2\frac{dy}{dx} = 12x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12x}{12y^2} = \frac{x}{y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y^2(1) - (x)(2y\, y')}{y^4} = \frac{y^2 - 2xy\, y'}{y^4}$$

T. Haitham Harb
10School-Online
0797771137

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y^2 - 2xy\,y'}{y^4}$$

$$= \frac{y^2 - 2xy\left(\frac{x}{y^2}\right)}{y^4} = \frac{y^2 - \frac{2x^2}{y}}{y^4}$$

$$= \frac{\frac{y^3 - 2x^2}{y}}{y^4} = \frac{y^3 - 2x^2}{y^5}$$

---

23) $xy + e^y = e$

$$\frac{d}{dx}(xy + e^y) = \frac{d}{dx}(e)$$

$$x\frac{dy}{dx} + y + e^y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x + e^y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x + e^y)\left(-\frac{dy}{dx}\right) + y\left(1 + e^y\frac{dy}{dx}\right)}{(x + e^y)^2}$$

$$= \frac{(x + e^y)\left(\frac{y}{x + e^y}\right) + y\left(1 + e^y\frac{-y}{x + e^y}\right)}{(x + e^y)^2}$$

$$= \frac{(x + e^y)(y) + y(x + e^y - ye^y)}{(x + e^y)^3}$$

$$= \frac{2yx + 2ye^y - y^2e^y}{(x + e^y)^3}$$

---

24) جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة $(x - 6)(y + 4) = 2$ عندما $(7, -2)$

أولاً: أجد المماس

$$(x - 6)(y + 4) = 2$$

$$\frac{d}{dx}((x - 6)(y + 4)) = \frac{d}{dx}(2)$$

$$(x - 6)\frac{dy}{dx} + (y + 4)(1) = 0$$

$$x\frac{dy}{dx} - 6\frac{dy}{dx} + y + 4 = 0$$

$$x\frac{dy}{dx} - 6\frac{dy}{dx} = -y - 4$$

$$\frac{dy}{dx}(x - 6) = -y - 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y - 4}{x - 6}$$

$$M_1 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(7,-2)} = \frac{-(-2) - 4}{7 - 6} = \frac{-2}{1} = -2$$

معادلة العمودي:

$$M_1 \times M_2 = -1$$

$$-2 \times M_2 = -1 \rightarrow M_2 = \frac{1}{2}$$

$$y + 2 = \frac{1}{2}(x - 7)$$

$$y + 2 = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{11}{2}$$

---

25) اثبت ان لمنحنى العلاقة $3x^2 + 2xy + y^2 = 6$ مماسين افقيين ثم جد احداثي نقطتي التماس.

الحل:

افرض (x_0, y_0) نقطة التماس

$$\frac{d}{dx}(3x^2 + 2xy + y^2) = \frac{d}{dx}(6)$$

$$6x + 2x\frac{dy}{dx} + 2y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = -6x - 2y$$

$$\frac{dy}{dx}(2x + 2y) = -6x - 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-6x - 2y}{2x + 2y} = \frac{2(-3x - y)}{2(x + y)} = \frac{-3x - y}{x + y}$$

$$M = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_0, y_0)} = 0$$

T. Haitham Harb
JoSchool-Online
0797771137

$$\frac{-3x_o - y_o}{x_o + y_o} = 0 \rightarrow -3x_o - y_o = 0 \rightarrow y_o = -3x_o$$

باستخدام العلاقة الاصلية

$$3x^2 + 2xy + y^2 = 6$$
$$3{x_o}^2 + 2x_o y_o + {y_o}^2 = 6$$
$$3{x_o}^2 + 2x_o(-3x_o) + (-3x_o)^2 = 6$$
$$3{x_o}^2 - 6{x_o}^2 + 9{x_o}^2 = 6$$
$$6{x_o}^2 = 6 \rightarrow \sqrt{{x_o}^2} = \sqrt{1} \rightarrow x_o = \pm 1$$

لدينا قيمتان لـ x تجعلان الميل 0، اذن يوجد مماسان افقيان :

نقطة التماس الأولى $x_o = 1 \rightarrow y_o = -3 \rightarrow (1,-3)$

نقطة التماس الثانية $x_o = -1 \rightarrow y_o = 3 \rightarrow (-1,3)$

---

26) جد احداثي نقطة على المنحنى $x + y^2 = 1$، بحيث يكون عندها مماس المنحنى موازياً للمستقيم $x + 2y = 0$

الحل :

(x_o, y_o) نقطة التماس غير معروفة

ميل المماس "لمستقيمنا" :

$$x + y^2 = 1$$
$$\frac{d}{dx}(x+y^2) = \frac{d}{dx}(1)$$
$$1 + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$2y\frac{dy}{dx} = -1$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2y}$$
$$M_1 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_0, y_0)} = \frac{-1}{2y_o}$$

ميل المستقيم الأخر:

$$x + 2y = 0$$
$$\frac{d}{dx}(x + 2y) = \frac{d}{dx}(0)$$
$$1 + 2\frac{dy}{dx} = 0$$
$$2\frac{dy}{dx} = -1$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2} = M_2$$

وبما ان المستقيمان متوازيان اذن ميلهما متساوي :

$$M_1 = M_2$$
$$\frac{-1}{2y_o} = \frac{-1}{2}$$
$$\therefore y_o = 1$$

ولان نقطة التماس تحقق المنحنى :

$$x_0 + {y_0}^2 = 1$$
$$x_0 + (1)^2 = 1$$
$$x_0 = 0$$

اذن نقطة التماس هي $(0,1)$

---

27) جد احداثي نقطة على المنحنى $y^3 = x^2$، بحيث يكون عندها مماس المنحنى عمودياً على المستقيم $y + 3x - 5 = 0$

الحل :

نقطة التماس (x_o, y_o) وميل مماسنا M_1

$$y^3 = x^2$$
$$\frac{d}{dx}(y^3) = \frac{d}{dx}(x^2)$$
$$3y^2\frac{dy}{dx} = 2x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2}$$
$$M_1 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_0, y_0)} = \frac{2x_o}{3{y_o}^2}$$

ميل المستقيم الاخر:

$$\frac{d}{dx}(y + 3x - 5) = \frac{d}{dx}(0)$$
$$\frac{dy}{dx} + 3 = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -3 = M_2$$

T. Haitham Harb
JoSchool-Online
0797771137

بما ان المستقيمان متعامدان فإن :

$$M_1 \times M_2 = -1$$

$$\frac{2x_o}{3{y_o}^2} \times -3 = -1 \rightarrow \frac{2x_o}{3{y_o}^2} = \frac{1}{3} \rightarrow 2x_o = {y_o}^2$$

لكن من تعويض نقطة التماس في المنحنى فإن :

$${y_o}^3 = {x_o}^2 \rightarrow \sqrt[3]{{y_o}^3} = \sqrt[3]{{x_o}^2} \rightarrow y_o = x_o^{\frac{2}{3}}$$

اذن :

$$2x_o = {y_o}^2 \rightarrow 2x_o = (x_o^{\frac{2}{3}})^2 \rightarrow 2x_o - x_o^{\frac{4}{3}} = 0$$

$$x_o(2 - x_o^{\frac{1}{3}}) = 0$$

$$x_o = 0 \quad or \quad \left(x_o^{\frac{1}{3}} = 2 \rightarrow x_o = 8\right)$$

$x_o = 0$:

$y_o = \sqrt[3]{0^2} = 0 \rightarrow (0,0)$ " تهمل لان الميل غير معرف عندها "

$x_o = 8$: $\rightarrow \quad M_1 = \frac{0}{0}$

$y_o = \sqrt[3]{8^2} = 4 \rightarrow (8,4)$

---

28) اذا كان $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 10$ ، فاثبت ان : $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

الحل :

$$\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 10$$

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = 10$$

$$\frac{x+y}{\sqrt{x}\sqrt{y}} = 10$$

$$x + y = 10\sqrt{x}\sqrt{y}$$

$$(x+y)^2 = 100xy$$

$$\frac{d}{dx}(x+y)^2 = \frac{d}{dx}(100xy)$$

$$2(x+y)\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = 100x\frac{dy}{dx} + 100y$$

$$(x+y)\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = 50x\frac{dy}{dx} + 50y$$

$$x + x\frac{dy}{dx} + y + y\frac{dy}{dx} = 50x\frac{dy}{dx} + 50y$$

$$x\frac{dy}{dx} + y\frac{dy}{dx} - 50x\frac{dy}{dx} = 50y - x - y$$

$$y\frac{dy}{dx} - 49x\frac{dy}{dx} = 49y - x$$

$$\frac{dy}{dx}(y - 49x) = 49y - x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{49y - x}{y - 49x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\left(49 - \frac{x}{y}\right)}{x\left(\frac{y}{x} - 49\right)}$$

$$\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 10 \rightarrow \left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2 = 10^2$$

$$\frac{x}{y} + 2\sqrt{\frac{x}{y}}\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} = 100$$

$$\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x} = 100$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 98 \rightarrow \quad \therefore \frac{y}{x} = 98 - \frac{x}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\left(49 - \frac{x}{y}\right)}{x\left(\frac{y}{x} - 49\right)} = \frac{y\left(49 - \frac{x}{y}\right)}{x\left(98 - \frac{x}{y} - 49\right)} = \frac{y\left(49 - \frac{x}{y}\right)}{x\left(98 - \frac{x}{y} - 49\right)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\left(49 - \frac{x}{y}\right)}{x\left(49 - \frac{x}{y}\right)} = \frac{y}{x}$$

T. Haitham Harb
JoSchool Online
0797771137

29) اجد احداثيي النقطة على منحنى الاقتران :

$y = x^{1/x}\ , x > 0$ ، التي يكون عندها ميل المماس صفراً .

الحل :

$$y = x^{\frac{1}{x}}\ ,\ \ x > 0$$

$$ln\ y = ln\ x^{\frac{1}{x}}$$

$$ln\ y = \frac{1}{x} ln\ x$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}(ln\ x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(1 - ln\ x)}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{y(1 - ln\ x)}{x^2} = 0$$

$$ln\ x = 1$$

$$x = e$$

$$y = e^{1/e}$$

النقطة المطلوبة هي $(e, e^{1/e})$

---

30) جد احداثيات جميع النقاط على منحنى الدائرة

$x^2 + y^2 = 100$ ، والتي يكون عندها ميل المماس $\frac{3}{4}$

الحل :

نقطة التماس (x_o, y_o) ، وميل مماسنا M_1

$$x^2 + y^2 = 100$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(100)$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$y\frac{dy}{dx} = -x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

$$M_1 = \frac{dy}{dx}\Big|_{(x_0, y_0)} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{-x_o}{y_o} = \frac{3}{4} \rightarrow -4x_o = 3y_o \rightarrow x_o = \frac{-3}{4}y_o$$

باستخدام المعادلة الاصلية وبما ان نقطة التماس تحققها فإن:

$${x_o}^2 + {y_o}^2 = 100$$

$$(\frac{-3}{4}y_o)^2 + {y_o}^2 = 100$$

$$\frac{9}{16}{y_o}^2 + {y_o}^2 = 100$$

$$\frac{25}{16}{y_o}^2 = 100 \rightarrow \sqrt{{y_o}^2} = \sqrt{\frac{(100)(16)}{25}}$$

$$|y_o| = \frac{(10)(4)}{5} = 8 \rightarrow y_o = \pm 8$$

$$x_o = \frac{-3}{4}y_o$$

$y_o = 8$:

$$x_o = -6 \rightarrow (-6, 8)$$

$y_o = -8$:

$$x_o = 6 \rightarrow (6, -8)$$

يمثل الاقتران $s(t) = t^{\frac{1}{t}}\ , t > 0$ موقع جسيم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار و t الزمن بالثواني

31) جد سرعة الجسيم المتجهة و تسارعه

$$s(t) = t^{\frac{1}{t}}$$

$$ln\ s(t) = ln(t)^{\frac{1}{t}}$$

$$ln\ s(t) = \frac{ln\ t}{t}$$

$$\frac{s'(t)}{s(t)} = \frac{t\left(\frac{1}{t}\right) - (ln\ t)\ (1)}{t^2}$$

T. Haitham Harb
JoSchool-Online
0797771137

$$s'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2} \times s(t)$$

$$v(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2} \times t^{\frac{1}{t}}$$

السرعة المتجهة :

$$v(t) = (1 - \ln t)\, t^{\frac{1}{t}-2}$$

$$\ln(v(t)) = \ln\left((1 - \ln t)\, t^{\frac{1}{t}-2}\right)$$

$$\ln(v(t)) = \ln(1 - \ln t) + \ln t^{\frac{1}{t}-2}$$

$$\ln(v(t)) = \ln(1 - \ln t) + \left(\frac{1}{t} - 2\right)\ln t$$

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{-\frac{1}{t}}{(1 - \ln t)} + \left(\frac{1}{t} - 2\right)\left(\frac{1}{t}\right) + (\ln t)\left(\frac{-1}{t^2}\right)$$

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{-1}{t(1 - \ln t)} + \frac{1 - 2t}{t^2} - \frac{\ln t}{t^2}$$

$$a(t) = v'(t) = \left(\frac{-1}{t(1 - \ln t)} + \frac{1 - 2t - \ln t}{t^2}\right) \times v(t)$$

التسارع :

$$a(t) = \left(\frac{-1}{t(1 - \ln t)} + \frac{1 - 2t - \ln t}{t^2}\right)(1 - \ln t)\, t^{\frac{1}{t}-2}$$

32) اذا كان $y = \ln x$ ، $x > 0$ ، فاثبت ان : $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

باستعمال الاشتقاق الضمني

$$y = \ln x$$

$$e^y = e^{\ln x}$$

$$e^y = x$$

$$\frac{d}{dx}(e^y) = \frac{d}{dx}(x)$$

$$e^y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

أجد مشتقة كلٍّ من الاقترانات الآتية باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي .

33) $y = (x^2 + 3)^x$

$$\ln y = \ln(x^2 + 3)^x$$

$$\ln y = x \ln(x^2 + 3)$$

$$\frac{y'}{y} = x\left(\frac{2x}{x^2 + 3}\right) + \ln(x^2 + 3)\ (1)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2x^2}{x^2 + 3} + \ln(x^2 + 3)$$

$$y' = \left(\frac{2x^2 + (x^2 + 3)\ln(x^2 + 3)}{(x^2 + 3)}\right) \times y$$

$$y' = \left(\frac{2x^2 + (x^2 + 3)\ln(x^2 + 3)}{(x^2 + 3)}\right) \times y$$

$$y' = \left(\frac{2x^2 + (x^2 + 3)\ln(x^2 + 3)}{(x^2 + 3)}\right) \times (x^2 + 3)^x$$

$$y' = (2x^2 + (x^2 + 3)\ln(x^2 + 3))(x^2 + 3)^{x-1}$$

T. Haitham Harb
toSchool-Online
0797771137

$$34)\ y = \frac{(x^4+1)\sqrt{x+2}}{2x^2+2x+1}$$

$$\ln y = \ln\left(\frac{(x^4+1)\sqrt{x+2}}{2x^2+2x+1}\right)$$

$$\ln y = \ln(x^4+1) + \ln\sqrt{x+2} - \ln(2x^2+2x+1)$$

$$\ln y = \ln(x^4+1) + \frac{1}{2}\ln(x+2) - \ln(2x^2+2x+1)$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{4x^3}{x^4+1} + \frac{1}{2x+4} - \frac{4x+2}{2x^2+2x+1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{4x^3}{x^4+1} + \frac{1}{2x+4} - \frac{4x+2}{2x^2+2x+1}\right)\frac{(x^4+1)\sqrt{x+2}}{2x^2+2x+1}$$

$$35)\ y = \sqrt{x^2(x+1)(x+2)}$$

$$y = (x^2(x+1)(x+2))^{\frac{1}{2}}$$

$$\ln y = \frac{1}{2}\ln(x^2(x+1)(x+2))$$

$$\ln y = \frac{1}{2}(\ln x^2 + \ln(x+1) + \ln(x+2))$$

$$\ln y = \frac{1}{2}(2)\ln x + \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x+2)$$

$$\ln y = \ln x + \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x+2)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x+2)}$$

$$y' = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x+2)}\right) \times y$$

حيث :

$$y = \sqrt{x^2(x+1)(x+2)}$$

$$36)\ y = x^{\sin x}, x > 0$$

$$\ln y = \ln x^{\sin x} \rightarrow \ln y = \sin x \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = (\sin x)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(\cos x)$$

$$y' = \left(\frac{\sin x}{x} + \ln x \cos x\right) \times y$$

$$y' = \left(\frac{\sin x + x \ln x \cos x}{x}\right) \times x^{\sin x}$$

$$y' = (\sin x + x \ln x \cos x)\, x^{\sin x - 1}$$

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل معادلة وسيطية مما يلي عند قيمة t المعطاة

$$37)\ x = \sin t, y = \cos t \ , \quad t = \frac{\pi}{4}$$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\tan t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sec^2 t}{\cos t} = -\sec^3 t$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\sec^3\frac{\pi}{4} = -2\sqrt{2}$$

$$38)\ x = e^{-t}, y = t^3 + t + 1, (t = 0)$$

$$\frac{dy}{dt} = 3t^2 + 1$$

$$\frac{dx}{dt} = -e^{-t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2+1}{-e^{-t}}$$

$$= -e^t(3t^2+1)$$

T. Haitham Harb
JoSchool-Online
0797771137

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(-e^t(3t^2+1)\right)}{-e^{-t}}$$

$$= \frac{-e^t(6t) + (3t^2+1)(-e^t)}{-e^{-t}}$$

$$= \frac{-e^t(6t+3t^2+1)}{-e^{-t}} = \frac{e^t(6t+3t^2+1)}{e^{-t}}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0} = \frac{e^0(6(0)+3(0)^2+1)}{e^0} = 1$$

اذا كانت العلاقة $x^3 + y^3 = 6xy$ ، فأجب عما يلي :

39) أجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع منحنى المماس مع المنحنى $y = x$ في الربع الأول

$$x^3 + y^3 = 6xy \rightarrow x^3 + x^3 = 6x^2$$

$$2x^3 = 6x^2 \rightarrow x^3 = 3x^2 \rightarrow x^3 - 3x^2 = 0$$

$$x^2(x-3) = 0 \rightarrow x = 0, 3$$

$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0,0)$ ترفض لانها ليست في الربع الأول

$x = 3 \rightarrow y = 3 \rightarrow (3,3)$ نقطة التقاطع (نقطة التماس)

الان نجد معادلة المماس:

$$y - y_1 = M_1(x - x_1)$$

$$y - 3 = M_1(x - 3)$$

$$M_1 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,3)}$$

$$\frac{d}{dx}(x^3 + y^3) = \frac{d}{dx}(6xy)$$

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 6x\frac{dy}{dx} + 6y$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} - 6x\frac{dy}{dx} = 6y - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}(3y^2 - 6x) = 6y - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6y - 3x^2}{3y^2 - 6x} = \frac{3(2y - x^2)}{3(y^2 - 2x)} = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

$$M_1 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,3)} = \frac{2(3) - 3^2}{3^2 - 2(3)} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$\rightarrow y - 3 = -1(x-3) \rightarrow y = -x + 6$$

---

40) جد احداثي نقطة على منحنى العلاقة في الربع الاول بحيث يكون عندها مماس المنحنى افقياً عندها افقياً

الحل :

$$M = \frac{dy}{dx}|(x_o, y_o) = \frac{2y_o - {x_o}^2}{{y_o}^2 - 2x_o} = 0$$

$$2y_o - {x_o}^2 = 0$$

$$\sqrt{{x_o}^2} = \sqrt{2y_o}$$

$$|x_o| = \sqrt{2y_o}$$

$$x_o = \sqrt{2y_o} \quad , \quad x_o = -\sqrt{2y_o}$$

لكن $x_o = -\sqrt{2y_o}$ ترفض لانها لا تقع في الربع الأول

$$x_o = \sqrt{2y_o}$$

نعوضها في العلاقة لنجد الاحداثيات

$${x_o}^3 + {y_o}^3 = 6x_oy_o$$

$$\left(\sqrt{2y_o}\right)^3 + {y_o}^3 = 6\left(\sqrt{2y_o}\right)y_o$$

$$2\sqrt{2}\,(y_o)^{\frac{3}{2}} + {y_o}^3 = 6\sqrt{2}(y_o)^{\frac{3}{2}}$$

$$-4\sqrt{2}\,(y_o)^{\frac{3}{2}} + {y_o}^3 = 0$$

$$y_o^{\frac{3}{2}}\left(-4\sqrt{2} + y_o^{\frac{3}{2}}\right) = 0 \quad \left(y_o^{\frac{3}{2}} = 0 \rightarrow y_o = 0\right)$$

$$y_o^{\frac{3}{2}} = 4\sqrt{2}$$

$$y_o = \sqrt[3]{\left(4\sqrt{2}\right)^2}$$

$$y_o = \sqrt[3]{32}$$

$$\therefore x_o = \sqrt{2y_o} \ , y_o = \sqrt[3]{32}$$

نعوض $y_o = \sqrt[3]{32}$ في x_o

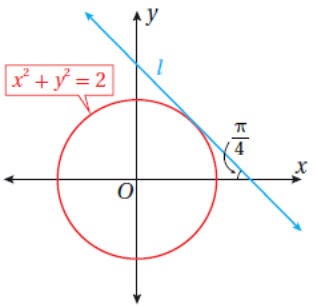
$$x_o = \sqrt{2y_o} = \sqrt{2\sqrt[3]{32}} = \sqrt{2\sqrt[3]{2^5}} = \sqrt{2(2)^{\frac{5}{3}}}$$

$$= \sqrt{2^{\frac{8}{3}}} = (2^{\frac{8}{3}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{16}$$

اذن النقطة هي $(\sqrt[3]{16}\ , \sqrt[3]{32})$

T. Haitham Harb
Jo School-Online
0797771137

41) يبين الشكل المجاور منحنى العلاقة $x^2 + y^2 = 2$ ، والمستقيم l الذي يمثل مماساً لمنحنى العلاقة في الربع الأول . فأجد معادلة المستقيم l



لتكن نقطة التماس $A(x_1 , y_1)$

بإشتقاق طرفي العلاقة $x^2 + y^2 = 2$ بالنسبة الى x نجد أن :

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

اذن ميل المماس l هو $\frac{-x_o}{y_o}$

لكن ميل المماس l هو $tan\frac{3\pi}{4} = -1$

اذن : $\frac{-x_o}{y_o} = -1 \quad \rightarrow \quad x_1 = y_1$

وبتعويض (x_1 , y_1) في المعادلة المعطاة نجد أن :

$$x_1^2 + y_1^2 = 2$$

وبتعويض $x_1 = y_1$ في هذه المعادلة نجد أن :

$$x_1{}^2 + x_1{}^2 = 2 \quad \rightarrow \quad 2x_1{}^2 = 2 \quad \rightarrow \quad x_1{}^2 = 1$$
$$\rightarrow \quad x_1 = 1$$

اذن نقطة التماس هي $A(1 , 1)$ ومعادلة المماس l هي :

$$y - 1 = -1\,(x - 1)$$
$$y = -x + 2$$

مهارات التفكير العليا

اذا كان $x^2 - y^2 = 1$ ، فاجب عن الأسئلة التالية:

42) أجد $\frac{dy}{dx}$

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 - y^2) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$2x - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

43) يمكن التعبير عن منحنى العلاقة $x^2 - y^2 = 1$ بالمعادلة الوسيطية $x = sec\,t , y = tan\,t$ حيث $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

استعمل هذه الحقيقة لايجاد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{sec^2 t}{sec\,t\,tan\,t} = \frac{sec\,t}{tan\,t}$$

44) اثبت ان المقدارين الجبريين الذين يمثلان $\frac{dy}{dx}$ الناتجين بالفرعين السابقين متكافئين

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

وبما ان (x, y) تمثل احداثيات أي نقطة تقع على منحنى العلاقة $x^2 - y^2 = 1$ ، و يمكن التعبير عنها بدلالة t وفق المعادلة الوسيطية حيث $x = sec\,t , y = tan\,t$ فإن $(x, y) = (sec\,t, tan\,t)$

اذن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} = \frac{sec\,t}{tan\,t} \quad \#$$

T. Haitham Harb
JoSchool-Online
0797771137

45) اجد احداثيات النقطة التي يكون عندها ميل المماس 2

$$M = \frac{dy}{dx}\Big|_{(x_0,y_0)} = \frac{x_o}{y_o} = 2 \rightarrow x_o = 2y_o$$

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$x_o{}^2 - y_o{}^2 = 1 \rightarrow (2y_o)^2 - y_o{}^2 = 1 \rightarrow y_o{}^2 = 1$$

$$y_o = \pm 1$$

النقطة الأولى $y_o = 1 \rightarrow x_o = 2 \rightarrow (2,1)$

النقطة الثانية $y_o = -1 \rightarrow x_o = -2 \rightarrow (-2,-1)$

---

46) تبرير : اذا مثل L أي مماس لمنحنى المعادلة $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{k}$ حيث k عدد حقيقي موجب فاثبت ان مجموع المقطع x و المقطع y للمستقيم L يساوي k، مبرراً اجابتك

أولاً: نجد معادلة المستقيم عند نقطة التماس (x_o,y_o) :

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = (\sqrt{k})^2$$

$$x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y = k$$

$$\frac{d}{dx}(x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y) = \frac{d}{dx}(k)$$

$$1 + 2\sqrt{x}\,\frac{\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{y}} + \sqrt{y}\,\frac{2}{2\sqrt{x}} + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$1 + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + 1\right) = -\left(1 + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{y}}\right) = -\left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)}{\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{y}}} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

$$M = \frac{dy}{dx}\Big|_{(x_0,y_0)} = -\frac{\sqrt{y_o}}{\sqrt{x_o}}$$

اذن معادلة المماس:

$$y - y_o = -\frac{\sqrt{y_o}}{\sqrt{x_o}}(x - x_o)$$

ثانياً: المقطع الصادي $(0,y)$ عوض $x = 0$

$$y - y_o = -\frac{\sqrt{y_o}}{\sqrt{x_o}}x$$

$$y - y_o = \frac{\sqrt{y_o}\,x_o}{\sqrt{x_o}}$$

$$y - y_o = \frac{\sqrt{y_o}\,\sqrt{x_o}\,\sqrt{x_o}}{\sqrt{x_o}}$$

$$y - y_o = \sqrt{y_o}\,\sqrt{x_o}$$

$$\therefore y = \sqrt{y_o}\,\sqrt{x_o} + y_o$$

ثالثاً: نجد المقطع السيني $(x,0)$:

عوض $y = 0$

$$y - y_o = -\frac{\sqrt{y_o}}{\sqrt{x_o}}(x - x_o)$$

$$0 - y_o = -\frac{\sqrt{y_o}}{\sqrt{x_o}}(x - x_o)$$

$$y_o = \frac{\sqrt{y_o}}{\sqrt{x_o}}(x - x_o)$$

$$\frac{\sqrt{x_o}}{\sqrt{y_o}}y_o = (x - x_o)$$

$$\frac{\sqrt{x_o}\,\sqrt{y_o}\,\sqrt{y_o}}{\sqrt{y_o}} = x - x_o$$

$$\therefore x = \sqrt{x_o}\sqrt{y_o} + x_o$$

الان اثبت ان $x + y = k$

$$x + y = \sqrt{x_o}\sqrt{y_o} + x_o + \sqrt{y_o}\sqrt{x_o} + y_o$$

$$= x_o + 2\sqrt{y_o}\sqrt{x_o} + y_o = k$$

T. Haitham Harb
JoSchool Online
0797771137

47) اذا كان مماس منحنى الاقتران $y = (x-3)^{\sqrt{x}}$ ،

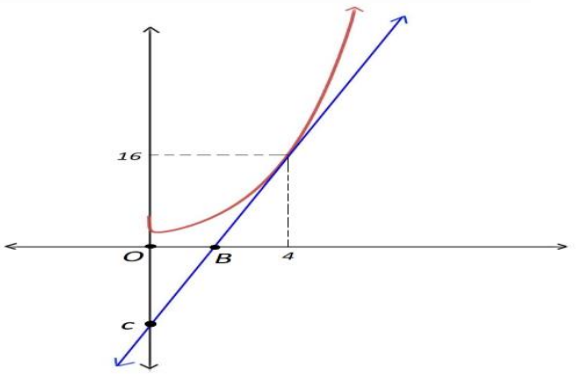
عند النقطة $(4,1)$ يقطع المحور x في B و يقطع المحور y

في C ، جد مساحة ΔOBC حيث أن O نقطة الأصل

فرض النقاط: $\overbrace{B(x_2,0), C(0,y_2)}$

$$A = \frac{1}{2}\underbrace{(x_2)}_{\text{طول القاعدة}}\underbrace{(y_2)}_{\text{ارتفاع}}$$

تخيل شكل الرسمة :



أولاً: معادلة المماس عند النقطة $(4,1)$:

$$y - y_1 = M(x - x_1)$$
$$y - 1 = M(x - 4)$$

بدنا الميل؟

$$y = (x-2)^{\sqrt{x}}$$
$$\ln y = \ln(x-3)^{\sqrt{x}}$$
$$\ln y = \sqrt{x}\,(\ln(x-3))$$
$$\frac{y'}{y} = \sqrt{x}\left(\frac{1}{x-3}\right) + \ln(x-3)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$
$$y' = y\left(\frac{\sqrt{x}}{x-3} + \frac{\ln(x-3)}{2\sqrt{x}}\right)$$
$$y' = (x-3)^{\sqrt{x}}\left(\frac{\sqrt{x}}{x-3} + \frac{\ln(x-3)}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$M = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(4,1)} = (1)^2\left(\frac{2}{2} + \frac{\ln 1}{2(2)}\right)$$

$$= 1(2+0) = 2$$

اذن معادلة المماس:

$$y - 1 = 2(x - 4)$$

ثانياً: المقطع x و المقطع y

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad y = -7$$
$$y = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = 2x - 7 \quad \rightarrow \quad x = 3.5$$

اذن مساحة المثلث OBC بوحدة المساحة هي :

$$A = \frac{1}{2}(3.5) \times |-7| = 12.25$$

T. Haitha
JoSchool-Online
0797771137